

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Contrôle optimal de systèmes discrets linéaires constants

Deschuyteneer, Thérèse

*Award date:*  
1999

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix  
Namur  
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques

---

# Contrôle Optimal De Systèmes Discrets Linéaires Constants

Mémoire présenté pour l'obtention du grade  
de Licenciée en Sciences  
mathématiques  
par

**Promoteur : F.M. Callier**

**Thérèse DESCHUYTENEER**

Année académique : 1998-1999

## **Remerciements**

Avant de vous laisser découvrir cet ouvrage, je tenais à remercier toutes les personnes qui m'ont de près ou de loin aidée dans l'élaboration de cette tâche. Ma gratitude s'adresse principalement à Monsieur Callier qui m'a soutenue tout au long de cette année ainsi qu'à Madame Dumortier. Je remercie également Monsieur Winkin, Laurence et Jean-Philippe pour leur participation active aux séminaires de préparation de la défense de mon mémoire. Merci aussi à toutes les personnes qui m'ont guidée dans sa rédaction.

## Résumé

Ce mémoire concerne le contrôle optimal dans le cadre des systèmes discrets linéaires constants. Nous avons un système discret linéaire constant à deux entrées et une sortie : une entrée est appelée perturbation et l'autre contrôle. Nous obtenons le meilleur contrôle qui minimise l'impact de la perturbation sur la sortie équipée d'une norme dans  $l_2$ .

## Abstract

This report handels the solution of an optimal control problem for discrete-time linear time-invariant systems. We consider a two-input one-output system ; one input is the perturbation and the other one is the control. We obtain then the best control to minimize the impact of the perturbation on the output equipped with an  $l_2$ -norm.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Les systèmes discrets</b>	<b>6</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.2 Description du système discret linéaire constant $G=[A,B,C,D]$ . . . . .	6
1.3 Accessibilité, contrôlabilité et observabilité . . . . .	7
1.4 Stabilité . . . . .	8
1.5 Stabilisabilité et détectabilité . . . . .	9
<b>2 Le domaine temporel et le domaine fréquentiel</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 Domaine temporel . . . . .	11
2.2.1 Signaux . . . . .	11
2.2.2 Normes . . . . .	12
2.2.3 Espaces et produit scalaire . . . . .	14
2.3 Domaine fréquentiel . . . . .	14
2.3.1 Fonctions de transfert . . . . .	14
2.3.2 Normes . . . . .	15
2.3.3 Espaces et produit scalaire . . . . .	16
2.4 Liens entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel . . . . .	17
<b>3 Paire symplectique et fonction Ric</b>	<b>19</b>
3.1 Introduction . . . . .	19
3.2 Paire symplectique . . . . .	19
3.3 Fonction Ric . . . . .	21
3.4 Equation de Lyapounov . . . . .	23
3.5 Lemmes et Théorème . . . . .	24
<b>4 Lemmes préliminaires au théorème 5.2.1</b>	<b>34</b>
4.1 Introduction . . . . .	34
4.2 Lemme : paire symplectique associée au système $H=[A, (B_1 \ B_2), C_1, (D_{11} \ D_{12})]$	34
4.3 Lemme : espace d'appartenance de $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c$ . . . . .	37

4.4	Lemme : nouvelle formulation de la matrice $\hat{g}_i \tilde{g}_i$ . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Minimisation de la norme-<math>l_2</math> de la sortie du système H</b>	<b>46</b>
5.1	Introduction . . . . .	46
5.2	Minimisation de l'impact de la perturbation sur la sortie . . . . .	46
5.3	Preuve . . . . .	48
	<b>Notations</b>	<b>54</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

# Introduction

Dans ce mémoire, nous étudions l'impact de la perturbation d'un système discret linéaire constant sur sa sortie en choisissant un contrôle. Plus particulièrement, nous minimisons la norme- $l_2$  de la sortie d'un tel système en cherchant pour quel contrôle elle est obtenue. Nous nous sommes basés sur des résultats tirés du livre "Optimal Sampled-Data Control Systems", pp 131-143, de Tongwen Tchen et Bruce Francis ainsi que des résultats et définitions pp 65-88. Nous nous sommes également appuyés sur le livre de F.M. Callier et C.A. Desoer et la philosophie des cours de contrôle optimal et de systèmes optimaux asservis.

Ce problème (minimisation de l'impact de la perturbation sur la sortie) est essentiel à la théorie du contrôle optimal afin de résoudre le problème de contrôle  $\mathcal{H}_2$ -optimal (cfr le livre de Tongwen Tchen et Bruce Francis pp 143-150).

Afin de résoudre le problème de minimisation de l'impact de la perturbation sur la sortie, nous commençons (Chapitre 1) par donner un rappel des définitions relatives aux systèmes discrets linéaires constants. Ensuite (Chapitre 2), nous introduisons des normes, des espaces et des produits scalaires en distinguant les domaines temporels et fréquentiels. Puis (Chapitre 3), nous parlons de paires symplectiques, d'équations de Lyapounov et Riccati et nous démontrons quelques lemmes ainsi qu'un théorème utile aux démonstrations du chapitre suivant. Par la suite (Chapitre 4), nous démontrons trois lemmes techniques afin de pouvoir réduire la démonstration du théorème (5.2.1) qui résout notre problème d'optimisation. Enfin (Chapitre 5), nous démontrons le théorème (5.2.1) de minimisation de l'impact de la perturbation sur la sortie.

# Chapitre 1

## Les systèmes discrets

### 1.1 Introduction

*Dans ce premier chapitre, nous donnons quelques définitions et théorèmes relatifs aux systèmes discrets linéaires constants. Toutes ces définitions ont bien entendu leur analogue en temps continu. Toutefois, nous n'en parlons pas car nous nous limitons dans cet ouvrage au cas discret.*

*Nous définissons les concepts de système discret linéaire constant, d'accessibilité, de contrôlabilité, d'observabilité, de stabilité, de stabilisabilité et de détectabilité.*

*Ces différents concepts seront utilisés par la suite en tant qu'hypothèses données aux éléments de certains théorèmes et lemmes.*

### 1.2 Description du système discret linéaire constant $G=[A,B,C,D]$

Définition : un système discret linéaire constant  $G=[A,B,C,D]$  est décrit par

$$\xi(k+1) = A\xi(k) + Bv(k) \quad (1.1)$$

$$\psi(k) = C\xi(k) + Dv(k) \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.2)$$

ou encore

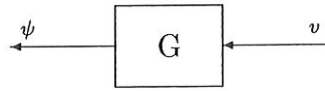
$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A\xi + Bv \\ \psi &= C\xi + Dv \end{aligned}$$

où

$\xi \in \mathbb{R}^n$ est l'état	$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$v \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée	$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\psi \in \mathbb{R}^p$ est la sortie	$C \in \mathbb{R}^{p \times n}$
$A, B, C, D$ sont des matrices constantes	$D \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Remarque : le point sur le  $\xi$  n'est donc pas l'habituel symbole de dérivée comme en temps continu. En effet, en temps discret, il marque l'avancement dans le temps. Il nous faut considérer  $\dot{\xi}$  comme équivalent à  $\xi(k+1)$ .

Nous prenons la convention de représenter ces systèmes de la manière suivante :



### 1.3 Accessibilité, contrôlabilité et observabilité

Nous pouvons définir les matrices de Contrôlabilité et d'Observabilité de notre système  $G=[A,B,C,D]$  de la façon suivante :

$$\mathcal{C} := (B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$

$$\mathcal{O} := \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

Définition : un état  $\xi \in \mathbb{R}^n$  est **accessible** si et seulement si  $\xi = \sum_{l=0}^{n-1} A^{n-1-l} B v(l)$  pour un certain contrôle  $v$  i.e.  $\xi \in \text{Im}[\mathcal{C}] := C(A, B)$ .

Définition : une paire  $(A,B)$  est **accessible** si et seulement si tout état est accessible.

Par abus de langage : un état  $\xi$  ou une paire  $(A,B)$  est **contrôlable** si et seulement si il (elle) est accessible.

Note :  $C(A,B)$  est appelé sous-espace contrôlable.

Définition : un état  $\xi \in \mathbb{R}^n$  ou une paire  $(C,A)$  est **inobservable** si et seulement si  $CA^k \xi = 0 \in \mathbb{R}^p \ \forall k \geq 0$



i.e.  $\xi \in N[\mathcal{O}] := NO(C, A)$  par le théorème de Cayley-Hamilton.

Définition : la paire  $(C, A)$  est **observable** si et seulement si l'état nul est le seul état inobservable.

Note :  $NO(C, A)$  est appelé sous-espace inobservable.

### **Théorème 1.3.1 (Contrôlabilité et observabilité)**

Soit un système discret linéaire constant  $G=[A, B, C, D]$

$$\begin{aligned}
 (A, B) \text{ contrôlable} &\iff \text{rang } \mathcal{C} = n \\
 &\iff \text{rang}(\lambda I - A \ B) = n \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
 &\iff C(A, B) = \mathbb{R}^n \\
 &\iff \forall \pi(\lambda) \ \exists F \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ tel que } \chi_{A+BF}(\lambda) = \pi(\lambda) \\
 (C, A) \text{ observable} &\iff \text{rang } \mathcal{O} = n \\
 &\iff \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
 &\iff NO(C, A) = \{0\} \in \mathbb{R}^n \\
 &\iff \forall \pi(\lambda) \ \exists L \in \mathbb{R}^{n \times p} \text{ tel que } \chi_{A+LC}(\lambda) = \pi(\lambda)
 \end{aligned}$$

où  $\pi(\lambda)$  est un polynôme monique de degré  $n$  en  $\lambda$

$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  est la notation pour le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .

## **1.4 Stabilité**

Pour notre système  $G=[A, B, C, D]$  décrit par (1.1, 1.2), nous considérons (1.1) avec une entrée  $v$  nulle, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= A\xi \\
 \xi(0) &\in \mathbb{R}^n
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nous définissons alors :

Définition : Un système discret linéaire constant  $G=[A, B, C, D]$  est **internement stable**  $\iff$  dans (1.3)  $\xi(k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty \ \forall \xi(0)$

L'équation (1.3) peut s'écrire sous la forme :  $\xi(k) = A^k \xi(0)$ , nous avons donc la stabilité interne ssi  $\varrho(A) < 1$  (où  $\varrho(A)$  est le rayon spectral de  $A$ ) ou encore ssi les valeurs propres de  $A$  sont toutes à l'intérieur du disque unité.

Note : nous dirons que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est stable  $\iff \varrho(A) < 1$ .

## 1.5 Stabilisabilité et détectabilité

Soit  $G=[A, B, C, D]$  un système discret linéaire constant décrit par

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= A\xi(k) + Bv(k) \\ \psi(k) &= C\xi(k) + Dv(k)\end{aligned}$$

Appelons :

$\mathcal{L}^-(A) :=$  le sous-espace stable (le sous-espace invariant engendré par les vecteurs propres (généralisés) associés aux valeurs propres de  $A$  tel que  $|\lambda| < 1$ ).

$\mathcal{L}^{0+}(A) :=$  le sous-espace instable (le sous-espace invariant engendré par les vecteurs propres (généralisés) associés aux valeurs propres de  $A$  tel que  $|\lambda| \geq 1$ ).

De plus les sous-espaces  $\mathcal{L}^-(A)$  et  $\mathcal{L}^{0+}(A)$  sont complémentaires et  $A$ -invariant, nous pouvons décomposer l'espace tout entier de la manière suivante :

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{L}^-(A) \oplus \mathcal{L}^{0+}(A)$$

Si nous prenons une base de  $\mathbb{R}^n$  qui est la réunion des bases de  $\mathcal{L}^-(A)$  et  $\mathcal{L}^{0+}(A)$ , nous obtenons grâce à la décomposition précédente :

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

où  $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^-(A)$  et  $\begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^{0+}(A)$

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$$

où  $A_1 = A|_{\mathcal{L}^-(A)}$  et  $A_2 = A|_{\mathcal{L}^{0+}(A)}$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$C = (C_1 \mid C_2)$$

$$D = D$$

Le système  $G$  devient :

$$\begin{aligned}\xi_1(k+1) &= A_1\xi_1(k) + B_1v(k) \\ \xi_2(k+1) &= A_2\xi_2(k) + B_2v(k) \\ \psi(k) &= C_1\xi_1(k) + C_2\xi_2(k) + Dv(k)\end{aligned}$$

où  $G_2 = [A_2, B_2, C_2, 0]$  est appelée partie instable de  $G$ .

Définition :

Le système discret linéaire constant  $G=[A,B,C,D]$

ou

la paire  $(A,B)$   
est **stabilisable**

$\iff$

$A$  est stable ou la paire  $(A_2, B_2)$  est contrôlable  
(i.e. une partie instable est contrôlable).

Définition :

Le système discret linéaire constant  $G=[A,B,C,D]$

ou

la paire  $(C,A)$   
est **déTECTABLE**

$\iff$

$A$  est stable ou la paire  $(C_2, A_2)$  est observable  
(i.e. une partie instable est observable).

Définition : Soit un système discret linéaire constant  $G=[A,B,C,D]$ , le **sous-espace indéTECTABLE** est l'intersection du sous-espace inobservable et du sous-espace instable ( i.e.  $ND(C,A) := NO(C,A) \cap \mathcal{L}^{0+}(A)$ ).

le **sous-espace stabilisable** est la somme du sous-espace contrôlable et du sous-espace stable (i.e.  $S(A,B) := C(A,B) + \mathcal{L}^-(A)$ ).

### **Théorème 1.5.1 (Stabilisabilité et déTECTabilité)**

Soit un système discret linéaire constant  $G=[A, B, C, D]$

$(A,B)$  stabilisable  $\iff \text{rang}(\lambda I - A \ B) = n \ \forall |\lambda| \geq 1$   
 $\iff \exists F \text{ tel que } A + BF \text{ est stable}$   
 $\iff S(A,B) = \mathbb{R}^n$

$(C,A)$  déTECTable  $\iff \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n \ \forall |\lambda| \geq 1$   
 $\iff \exists L \text{ tel que } A + LC \text{ est stable}$   
 $\iff ND(C, A) = \{0\} \in \mathbb{R}^n$



# Chapitre 2

## Le domaine temporel et le domaine fréquentiel

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous parlons d'abord de domaine temporel, ensuite de domaine fréquentiel et nous terminons en établissant des liens entre ces domaines.

Pour les deux domaines pré-cités, nous commençons par définir un concept (signal pour le domaine temporel et fonction de transfert pour le domaine fréquentiel). Ensuite, nous introduisons des normes, des espaces et un produit scalaire.

### 2.2 Domaine temporel

#### 2.2.1 Signaux

Définition : un **signal discret**  $v$  est une suite  $\{v(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  tel que chaque  $v(k)$  donne la valeur du signal au temps  $k$ .

Remarque : lorsque  $v(k) = 0 \forall k < 0$ , le signal est dit à support sur  $\mathbb{Z}_+$  tandis que lorsque  $v(k) = 0 \forall k \geq 0$ , le signal est dit à support sur  $\mathbb{Z}_-^0 = \mathbb{Z}_- \setminus \{0\}$ . Dans les autres cas le signal est dit à support sur  $\mathbb{Z}$ .

Définition : l'**impulsion unité de Dirac** est le signal  $\delta_d(k)$  à support sur  $\mathbb{Z}_+$  où

$$\delta_d(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Considérons le système  $G=[A,B,C,D]$  décrit par (1.1, 1.2).

Avec  $\xi(0) = 0$ , l'état au temps  $k$  d'un tel système est donné par :

$$\xi(k) = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-1-l} B v(l) & \forall k \geq 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

La sortie au temps  $k$  d'un tel système est donnée par :

$$\psi(k) = \sum_{l=0}^{k-1} C A^{k-1-l} B v(l) + D v(k) \quad (2.3)$$

La réponse impulsionnelle du système  $G$  est

$$g(k) = \begin{cases} C A^{k-1} B & \text{pour } k \geq 1 \\ D & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

En considérant la sortie au temps  $k$  donnée par (2.3) ainsi que la définition de réponse impulsionnelle (2.4) de notre système  $G=[A,B,C,D]$ , nous avons successivement :

$$\begin{aligned} \psi(k) &= \sum_{l=0}^{k-1} C A^{k-1-l} B v(l) + D v(k) \\ &= \sum_{l=0}^k g(k-l) v(l) \\ &= (g * v)(k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

i.e. la sortie au temps  $k$  est le produit de convolution de la réponse impulsionnelle et de l'entrée au temps  $k$ .

*Note : sans autre spécification de support, le produit de convolution de  $f$  par  $g$  est donné par  $(f * g)(k) := \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(k-l)g(l)$*

## 2.2.2 Normes

### a. Le cas scalaire ( $v \in \mathbb{R}$ )

Dans le domaine temporel, les normes sont définies sur des signaux. Pour des signaux à support sur  $\mathbb{Z}$ , nous définissons les normes-1, -2 et - $\infty$ .

La **norme-1** est définie par

$$\|v\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |v(k)|$$

La **norme-2** est définie par

$$\|v\|_2 = (v(0)^2 + v(1)^2 + \dots)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

La **norme- $\infty$**  est définie par

$$\|v\|_{\infty} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |v(k)|$$

*Note : ici nous avons défini les normes sur des signaux à support sur  $\mathbb{Z}$ , nous obtenons les normes-1 et -2 des signaux à support sur  $\mathbb{Z}_+$  et  $\mathbb{Z}_-^0$  en réalisant respectivement une somme sur  $k$  allant de 0 à  $\infty$  et sur  $k$  allant de  $-\infty$  à  $-1$ . Pour la norme infinie, dans le cas des supports sur  $\mathbb{Z}_-^0$  et  $\mathbb{Z}_+$ , nous prenons le sup sur les  $k$  respectivement dans  $\mathbb{Z}_-^0$  et  $\mathbb{Z}_+$ .*

#### b. Le cas vectoriel ( $v \in \mathbb{R}^n$ )

*Pour des signaux à support sur  $\mathbb{Z}$ , nous définissons les normes-1, -2 et  $\infty$ .*

La **norme-1** est définie par

$$\|v\|_1 := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^n |v_i(k)|$$

où les  $v_i(k)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont les composantes de  $v(k) \in \mathbb{R}^n$ .

La **norme-2** est définie par

$$\|v\|_2 := \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n v_i(k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où les  $v_i(k)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont les composantes de  $v(k) \in \mathbb{R}^n$ .

La **norme- $\infty$**  est définie par

$$\|v\|_{\infty} := \sup_k \max_i |v_i(k)|$$

où les  $v_i(k)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont les composantes de  $v(k) \in \mathbb{R}^n$ .

### 2.2.3 Espaces et produit scalaire

Définitions :

$$l(\mathbb{Z}_{\sim}) = \left\{ \begin{array}{ccc} v : & \mathbb{Z}_{\sim} & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & k & \rightsquigarrow v(k) \end{array} \right\}$$

$$l_2(\mathbb{Z}_{\sim}) = \left\{ \begin{array}{ccc} v : & \mathbb{Z}_{\sim} & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & k & \rightsquigarrow v(k) \end{array} \middle| \|v\|_2 < \infty \right\}$$

Le signe  $\sim$  doit être remplacé par  $()$ ,  $(+)$  et  $(-)$  selon que nous travaillons respectivement avec des signaux à support sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_+$  ou  $\mathbb{Z}_-^0$ .  $l(\mathbb{Z}_{\sim})$  représente les signaux bien-définis et  $l_2(\mathbb{Z}_{\sim})$  ceux qui sont de carré intégrable.

Nous avons  $l_2(\mathbb{Z}) = l_2(\mathbb{Z}_+) \oplus l_2(\mathbb{Z}_-^0)$ . Nous pouvons définir les produits scalaires sur  $l_2(\mathbb{Z}_{\sim})$  où  $\sim$  doit être remplacé par  $()$ ,  $(+)$  et  $(-)$  selon que nous travaillons sur  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_+$  et  $\mathbb{Z}_-^0$  et où la somme est prise respectivement de  $-\infty$  à  $\infty$ , de  $0$  à  $\infty$  et  $-\infty$  à  $-1$  de la façon suivante :

$$\forall \mu, \nu \in l_2(\mathbb{Z}_{\sim}) \quad \langle \nu, \mu \rangle := \sum_k \nu(k)' \mu(k)$$

Nous savons que  $l_2(\mathbb{Z}_-)$  est le complémentaire orthogonal de  $l_2(\mathbb{Z}_+)$ , c'est-à-dire que nous avons

$$\forall x \in l_2(\mathbb{Z}_-) \forall y \in l_2(\mathbb{Z}_+) \quad \langle x, y \rangle = 0 \quad (2.6)$$

## 2.3 Domaine fréquentiel

### 2.3.1 Fonctions de transfert

Définition : la transformée de Fourier de  $v \in l(\mathbb{Z})$  est donnée par :

$$\hat{v}(e^{j\theta}) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k) e^{jk\theta}$$

pour autant que la série converge.

Si nous considérons un signal  $v$  à support sur  $\mathbb{Z}_+$ , nous pouvons définir ses transformées en  $\lambda$  pour des  $\lambda$  tel que le série  $\sum_{k=0}^{\infty} v(k) \lambda^k$  converge.

Définition : la transformée en  $\lambda$  de  $v \in l(\mathbb{Z}_+)$  est

$$\hat{v}(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} v(k) \lambda^k \quad (2.7)$$

Définition : la **fonction de transfert** d'un système  $G$ , notée  $\hat{g}(\lambda)$ , est la transformée en  $\lambda$  de sa réponse impulsionnelle  $(g(k))_{k=0}^{\infty}$ , i.e.

$$\hat{g}(\lambda) := \sum_{k=0}^{\infty} g(k)\lambda^k \quad (2.8)$$

Pour notre système  $G=[A,B,C,D]$  décrit par (1.1, 1.2), nous avons que la réponse impulsionnelle était donnée par (2.4). De ce fait, sa fonction de transfert est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{g}(\lambda) &= D + CB\lambda + CAB\lambda^2 + CA^2B\lambda^3 + \dots \\ &= D + \lambda C(I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \dots)B \\ &= D + \lambda C(I - \lambda A)^{-1}B \end{aligned} \quad (2.9)$$

Par la transformée en  $\lambda$  du produit de convolution (2.5), nous avons que :

$$\hat{\psi}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)\hat{v}(\lambda) \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{En effet : } \hat{g}(\lambda)\hat{v}(\lambda) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} g(k)\lambda^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} v(l)\lambda^l\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} g(k)v(l)\lambda^{k+l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} g(k)v(n-k)\lambda^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n v(k)g(n-k)\right)\lambda^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi(n)\lambda^n \\ &= \hat{\psi}(\lambda) \end{aligned}$$

## 2.3.2 Normes

### a. Le cas scalaire ( $\hat{f} \in \mathbb{R}$ )

Dans le domaine fréquentiel, les normes sont définies sur des fonctions de transfert. Nous allons utiliser les éléments  $e^{j\theta}$  avec  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , c'est-à-dire des éléments appartenant à la frontière du disque unité.

Définition : La **norme-1** est définie par

$$\| \hat{f} \|_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{f}(e^{j\theta})| d\theta$$

Définition : La **norme-2** est définie par

$$\| \hat{f} \|_2 := \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{f}(e^{j\theta})|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition : La **norme- $\infty$**  est définie par

$$\| \hat{f} \|_\infty := \max_{\theta} |\hat{f}(e^{j\theta})|$$

**b. Le cas matriciel** ( $\hat{f} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ )

Définition : La **norme-2** est définie par

$$\| \hat{f} \|_2 := \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace}[\hat{f}(e^{j\theta})^* \hat{f}(e^{j\theta})] d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

où  $*$  est le transposé conjugué de l'élément considéré.

Définition : La **norme- $\infty$**  est définie par

$$\| \hat{f} \|_\infty := \sup_{\theta} \sigma_{\max}[\hat{f}(e^{j\theta})]$$

où  $\sigma_{\max}$  est la valeur singulière maximale.

### 2.3.3 Espaces et produit scalaire

Notations :

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\lambda| \leq 1 \} & (\text{Disque unité fermé}) \\ \overset{\circ}{\mathbb{D}} &= \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\lambda| < 1 \} & (\text{Disque unité ouvert}) \\ \delta\mathbb{D} &= \{ \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\lambda| = 1 \} & (\text{Frontière du disque unité}) \end{aligned}$$



Définitions :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D}) &:= \left\{ \begin{array}{c} \hat{f}: \delta\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^{p \times m} \\ e^{j\theta} \rightsquigarrow \hat{f}(e^{j\theta}) \end{array} \middle| \|\hat{f}\|_2 < \infty \right\} \\
\mathcal{L}_\infty(\delta\mathbb{D}) &:= \left\{ \begin{array}{c} \hat{f}: \delta\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^{p \times m} \\ e^{j\theta} \rightsquigarrow \hat{f}(e^{j\theta}) \end{array} \middle| \|\hat{f}\|_\infty < \infty \right\} \\
\mathcal{H}_2(\mathbb{D}) &:= \left\{ \begin{array}{c} \hat{f} \text{ est holomorphe sur } \overset{\circ}{\mathbb{D}} \\ \hat{f}(e^{j\theta}) = \lim_{r \xrightarrow{<} 1} \hat{f}(re^{j\theta}) \in \mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D}) \end{array} \right\} \\
\mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}) &:= \left\{ \begin{array}{c} \hat{f} \text{ est holomorphe sur } \overset{\circ}{\mathbb{D}} \\ \hat{f}(e^{j\theta}) = \lim_{r \xrightarrow{<} 1} \hat{f}(re^{j\theta}) \in \mathcal{L}_\infty(\delta\mathbb{D}) \end{array} \right\} \\
\mathcal{RH}_2(\mathbb{D}) &:= \{ \text{éléments rationnels de } \mathcal{H}_2(\mathbb{D}) \} \\
\mathcal{RH}_\infty(\mathbb{D}) &:= \{ \text{éléments rationnels de } \mathcal{H}_\infty(\mathbb{D}) \}
\end{aligned}$$

Nous pouvons également dire que :

$\mathcal{RH}_2(\mathbb{D})$  est l'ensemble des matrices réelles rationnelles qui n'ont pas de pôles dans  $\mathbb{D}$ , c'est-à-dire les matrices qui ont leurs pôles  $\lambda$  tel que  $|\lambda| > 1$ .

$\mathcal{RH}_2(\mathbb{D})^\perp$  est l'ensemble des matrices réelles rationnelles qui ont leurs pôles  $\lambda$  tel que  $|\lambda| < 1$  (où  $^\perp$  signifie que nous prenons le complémentaire orthogonal de l'ensemble considéré).

Remarque : nous définissons un produit scalaire sur  $\mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D})$  par :

$$\forall \hat{f}, \hat{g} \in \mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D}) \quad \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace}[\hat{f}(e^{j\theta})^* \hat{g}(e^{j\theta})] d\theta \right)^{\frac{1}{2}}$$

## 2.4 Liens entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel

1. Dans le cadre de la théorie de Fourier, nous avons les première et deuxième égalités de Parseval qui sont respectivement :

$$\forall f \in l_2(\mathbb{Z}) \quad \|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2 \quad (2.12)$$

$$\forall f, g \in l_2(\mathbb{Z}) \quad \langle f, g \rangle_2 = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_2 \quad (2.13)$$

2. Nous admettons sans démonstration, les théorèmes suivants :

### **Théorème 2.4.1**

La transformée de Fourier est un isomorphisme de  $l_2(\mathbb{Z})$  dans  $\mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D})$  tel que  $l_2(\mathbb{Z}_+)$  est envoyé dans  $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$  et  $l_2(\mathbb{Z}_-^0)$  dans  $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})^\perp$

### **Théorème 2.4.2**

La transformée en  $\lambda$  est un isomorphisme de  $l_2(\mathbb{Z}_+)$  dans  $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$ .

Ces théorèmes nous donnent alors :

$$\begin{aligned} l_2(\mathbb{Z}) &= l_2(\mathbb{Z}_+) \overset{\perp}{\oplus} l_2(\mathbb{Z}_-^0) \\ |||F & \quad |||\lambda \quad ||| \\ \mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D}) &= \mathcal{H}_2(\mathbb{D}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_2(\mathbb{D})^\perp \end{aligned}$$

*Note : “ ||| ” est une notation pour “isomorphisme” tandis que “F” et “ $\lambda$ ” sont respectivement des abréviations pour “Fourier” et “transformée en  $\lambda$ ”.*

Nous avons  $l_2(\mathbb{Z}) = l_2(\mathbb{Z}_+) \oplus l_2(\mathbb{Z}_-^0)$ . Grâce aux isomorphismes précédents, nous obtenons :  $\mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D}) = \mathcal{H}_2(\mathbb{D}) \oplus \mathcal{H}_2(\mathbb{D})^\perp$

*Remarque : nous parlerons dorénavant de norme- $l_2$  et norme- $l_\infty$  dans le cas temporel et de norme- $\mathcal{H}_2$  et norme- $\mathcal{H}_\infty$  dans le cas fréquentiel pour désigner les normes qui ont été définies précédemment afin de distinguer les normes du cas temporel de celles du cas fréquentiel.*



## Chapitre 3

# Paire symplectique et fonction Ric

### 3.1 Introduction

*Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de paire symplectique, de fonction Ric (pour résoudre une équation de Riccati), d'équation de Lyapounov et de Riccati et nous montrons comment il est possible de construire la solution symétrique stabilisante d'une équation de Riccati à partir d'une paire symplectique. Nous montrons également des conditions suffisantes d'appartenance au domaine de la fonction Ric.*

### 3.2 Paire symplectique

*Nous définissons dans cette section la notion de paire symplectique et démontrons un théorème la concernant. Ce théorème nous permettra, à la section suivante, de donner le domaine de définition d'une certaine fonction Ric.*

Définition : une **paire symplectique** est une paire ordonnée de matrice

$$S = (S_l, S_r) = \left( \begin{pmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & A' \end{pmatrix} \right) \quad (3.1)$$

où  $A, I, P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P, Q$  sont symétriques.

Définition : soit  $(M, N)$  une paire ordonnée de matrices carrées de dimension  $n \times n$ .  $\lambda \in \mathbb{C}$  est **valeur propre généralisée** de  $(M, N)$  si et seulement si il existe un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  non nul tel que

$$Mx = \lambda Nx.$$

$x$  est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre généralisée  $\lambda$ .

En outre  $\lambda = \infty$  est une valeur propre généralisée de  $(M, N)$  s'il existe un vecteur  $x \in \mathbb{C}^n$  non-nul tel que  $Nx=0$ .

*Remarque : les valeurs propres généralisées sont les racines de l'équation caractéristique  $\det(M-\lambda N)=0$ . En outre, si  $N=I$ , une valeur propre généralisée est une valeur propre de  $M$ .*

### **Théorème 3.2.1**

Les valeurs propres généralisées de la paire symplectique  $S = (S_l, S_r)$  (3.1) sont symétriques par rapport au disque unité (i.e.  $\lambda \in \sigma(S) \iff \frac{1}{\lambda} \in \sigma(S)$ )

### **Preuve**

Nous allons diviser la preuve en 2 cas :

1. Cas où  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = \infty$

Nous avons alors un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes qui nous montrent que  $\lambda = 0$  est valeur propre de  $S$  si et seulement si  $\lambda = \infty$  est valeur propre de  $S$  :

$$\begin{aligned} 0 \in \sigma(S) &\iff \det(S_l) = 0 \\ &\iff \det(A) = 0 \\ &\iff \det(S_r) = 0 \\ &\iff \infty \in \sigma(S) \end{aligned}$$

2. Cas où  $\lambda \neq 0$  et  $\lambda \neq \infty$

a. Montrons que si  $\lambda$  est valeur propre de la paire symplectique  $S = (S_l, S_r)$  alors  $\frac{1}{\lambda}$  est valeur propre de la paire symplectique  $S^\sim = (S'_r, S'_l)$  (où le  $'$  représente la transposée de la matrice considérée).

$$\lambda \in \sigma[(S_l, S_r)] \implies \lambda \in \sigma[(S'_l, S'_r)] \implies \frac{1}{\lambda} \in \sigma[(S'_r, S'_l)]$$

Nous avons alors

$$S'_r x = \frac{1}{\lambda} S'_l x \tag{3.2}$$

b. Montrons  $S'_l x \neq 0$

Par l'absurde, supposons  $S'_l x = 0$ .

Ecrivons  $x$  sous la forme  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  où  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}^n$ . En vertu de l'équation (3.2),  $S'_l x = 0$  implique  $S'_r x = 0$ . Par définition de  $S_l$  et  $S_r$  en (3.1),  $S'_l x = 0$  implique  $x_2 = 0$  et  $S'_r x = 0$  implique  $x_1 = 0$ .

Comme  $x_1$  et  $x_2$  sont nuls, nous voyons que le vecteur  $x$  est nul, ce qui est impossible étant donné que  $x$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\frac{1}{\lambda}$  cfr (3.2).

c. Montrons que  $S_l J S'_l = S_r J S'_r$  où  $J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

En effet, par définition de  $S_l$  et  $S_r$  en (3.1), nous avons :

$$\begin{aligned} S_l J S'_l &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & -Q \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ I & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & -Q \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A' & 0 \end{pmatrix} \\ S_r J S'_r &= \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & -I \\ A' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ P & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A' & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d. Montrons que  $\frac{1}{\lambda}$  est valeur propre de  $S$ .

Pré-multiplions (3.2) par  $S_r J$ , nous avons :

$$\begin{aligned} S_r J S'_l x &= \frac{1}{\lambda} S_r J S'_l x \\ S_l J S'_l x &= \frac{1}{\lambda} S_r J S'_l x \quad \text{par c.} \\ S_l y &= \frac{1}{\lambda} S_r y \quad \text{où } y = J S'_l x \neq 0 \end{aligned}$$

Nous avons donc finalement  $\frac{1}{\lambda}$  est valeur propre de  $S$ . ■

### 3.3 Fonction Ric

Ici, nous définissons la "fonction Ric" et nous introduisons ce qui sera vu dans le reste du chapitre.

Définition :  $\mathcal{X}_i(S) \in \mathbb{R}^{2n}$  est l'espace engendré par l'ensemble des vecteurs propres (généralisés) associés aux valeurs propres généralisées stables de la paire symplectique  $S$  (c'est-à-dire qui ont leur module strictement inférieur à 1).

Définition : **dom Ric** est l'ensemble des paires symplectiques  $S$  qui n'ont pas de valeurs propres sur la frontière du disque unité et tel que les sous-espaces  $\mathcal{X}_i(S) \in \mathbb{R}^{2n}$  et  $\text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}$  sont complémentaires.

Remarque :  $\mathcal{X}_i(S)$  est de dimension  $n$  car  $S$  n'a pas de valeur propre sur la frontière du disque unité et les valeurs propres de  $S$  sont symétriques par rapport à ce dernier en vertu du théorème (3.2.1).

Définition : la fonction Ric est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ric} & : & \text{dom Ric} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ & & S \rightsquigarrow X \end{array} \quad (3.3)$$

tel que  $X = \text{Ric}(S)$  satisfait à  $\mathcal{X}_i(S) = \text{Im} \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix}$

En effet, supposons que  $\mathcal{X}_i(S) = \text{Im} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  (avec  $X_1$  et  $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) et  $\text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}$  sont complémentaires, nous avons alors que  $\begin{pmatrix} X_1 & 0_n \\ X_2 & I_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  est non singulière, ce qui nous permet de dire que  $X_1$  est non singulière.

Nous pouvons alors dire que  $\mathcal{X}_i(S) = \text{Im} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \text{Im} \begin{pmatrix} I_n \\ X \end{pmatrix}$  où  $X = X_2 X_1^{-1}$  est déterminé de façon unique par  $S$  ( $X = \text{Ric}(S)$ ).

Note d'introduction à ce qui va suivre dans ce chapitre : en utilisant une base réelle de  $\mathcal{X}_i(S) = \text{Im} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ , nous déduisons que :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} S_i$$

où  $S_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est stable.

En prenant  $X = X_2 X_1^{-1}$ , cette dernière équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix} (X_1 S_i X_1^{-1})$$

Nous obtenons alors que  $X = \text{Ric}(S)$  est une solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$A'X(I + PX)^{-1}A - X + Q = 0 \quad (3.4)$$



telle que  $(I + PX)^{-1}A = X_1 S_1 X_1^{-1}$  est stable (pour plus de détails, se référer à la preuve du lemme 3.5.2).

Il s'avèrera, de plus, que  $X=X'$  (i.e.  $X$  est symétrique). Nous disons que  $X := Ric(S)$  est une solution symétrique stabilisante de l'équation algébrique de Riccati (3.4).

La fonction Ric produit donc une solution symétrique stabilisante de l'équation algébrique de Riccati (3.4) à partir d'une paire symplectique  $S \in \text{dom Ric}$ .

### 3.4 Equation de Lyapounov

Nous définissons la notion d'Equation de Lyapounov et nous en donnons une solution lorsqu'une certaine condition est vérifiée. Nous pourrons alors utiliser cette solution pour démontrer le lemme (3.5.1) ainsi que la dernière partie du théorème (3.5.1).

**Définition :** Soit  $A, X$  et  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  où  $Q$  est symétrique, nous appelons équation de Lyapounov, l'équation

$$A'XA - X + Q = 0 \quad (3.5)$$

Si nous supposons connues les matrices  $A$  et  $Q$ , résoudre l'équation de Lyapounov consiste à trouver la matrice  $X$  qui vérifie (3.5).

#### Lemme 3.4.1

Si  $A$  est stable alors l'unique solution de l'équation de Lyapounov (3.5) est

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} A^k ' Q A^k \quad (3.6)$$

#### Preuve

1. Montrons que (3.6) est solution de (3.5)

Introduisons l'expression (3.6) de  $X$  dans (3.5), nous avons successivement :

$$\begin{aligned} A'XA - X + Q &= A' \sum_{k=0}^{\infty} A^k ' Q A^k A - \sum_{k=0}^{\infty} A^k ' Q A^k + Q \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A^k ' Q A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^k ' Q A^k + Q \\ &= -Q + Q = 0 \end{aligned}$$

2. Montrons que (3.6) est solution unique de (3.5) si A est stable

Définissons la fonction  $\Phi$  :

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ X & \rightsquigarrow & A'XA - X \end{array} \quad (3.7)$$

L'équation de Lyapounov aura une solution si et seulement si  $Q \in \text{Im } \Phi$ . Si l'équation de Lyapounov admet une solution alors elle est unique si et seulement si  $\Phi$  est injective.

a. Nous avons que  $Q \in \text{Im } \Phi$  par 1.

b. Montrons que  $\Phi$  est injective i.e.  $\text{Ker } \Phi = 0_{n \times n}$

i. Montrons que  $\sigma(\Phi) = \{\lambda_1 \lambda_2 - 1 : \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)\}$

Notons que  $\sigma(A) = \sigma(A')$ .

Si  $\lambda_1 \in \sigma(A)$  alors  $\exists x_1 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $A'x_1 = \lambda_1 x_1$ . Si  $\lambda_2 \in \sigma(A)$  alors  $\exists x_2 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $A'x_2 = \bar{\lambda}_2 x_2$  ou encore  $x_2^* A = x_2^* \lambda_2$  car  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Nous avons successivement avec  $X = x_1 x_2^* \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi(X) &= A'XA - X \\ &= A'x_1 x_2^* A - x_1 x_2^* \\ &= \lambda_1 x_1 x_2^* \lambda_2 - x_1 x_2^* \\ &= (\lambda_1 \lambda_2 - 1)X \end{aligned} \quad (3.8)$$

ii. Comme A est stable (ses valeurs propres sont à l'intérieur du disque unité), A n'a pas deux valeurs propres réciproques, d'où  $\text{Ker } \Phi = 0_{n \times n}$  par (3.8). ■

### 3.5 Lemmes et Théorème

*Nous commençons par définir un premier lemme. C'est un lemme technique qui nous permet d'abrégé la démonstration du lemme (3.5.2).*

**Lemme 3.5.1 (Propriétés de la matrice  $X_1'X_2$ )**

Si la paire symplectique  $S$  (3.1) n'a pas de valeurs propres sur  $\delta\mathbb{D}$  alors

i.  $X_1'X_2$  est symétrique.

ii.  $X_1'X_2$  est semi-définie positive si les matrices  $P$  et  $Q$  sont semi-définies positives

où  $X_1, X_2$  tel que  $\mathcal{X}_i(S) = \text{Im} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  (avec  $X_1$  et  $X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )

**Preuve**

i.  $X_1'X_2$  est symétrique.

a. La paire symplectique  $S$  n'a pas de valeurs propres sur  $\delta\mathbb{D}$ , nous avons vu à la section 3.3 qu'elle avait  $n$  valeurs propres (généralisées) stables (i.e. qui sont à l'intérieur du disque unité) associées à  $n$  vecteurs propres. Ses vecteurs propres sont rangés dans une matrice colonne  $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ .

Il est possible de construire une matrice  $S_i$  dont les valeurs propres sont les valeurs propres (généralisées) stables de  $S$  de sorte que nous avons la relation :

$$S_l \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = S_r \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} S_i$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} S_i$$

autrement dit

$$AX_1 = X_1 S_i + P X_2 S_i \quad (3.9)$$

$$X_2 = Q X_1 + A' X_2 S_i \quad (3.10)$$

b. Montrons que  $X_1'X_2 - X_2'X_1 = 0$ , nous aurons alors le résultat attendu.

Nous avons :

$$\begin{aligned} X_1'X_2 - X_2'X_1 &= X_1'(Q X_1 + A' X_2 S_i) - (Q X_1 + A' X_2 S_i)' X_1 \text{ par (3.10)} \\ &= X_1' A' X_2 S_i - S_i' X_2' A X_1 \text{ car } Q \text{ est symétrique} \\ &= (X_1 S_i + P X_2 S_i)' X_2 S_i - S_i' X_2' (X_1 S_i + P X_2 S_i) \text{ par (3.9)} \\ &= S_i' X_1' X_2 S_i - S_i' X_2' X_1 S_i \text{ car } P \text{ est symétrique} \\ &= S_i' (X_1' X_2 - X_2' X_1) S_i \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$S_i' (X_1' X_2 - X_2' X_1) S_i - (X_1' X_2 - X_2' X_1) = 0 \quad (3.11)$$

nous retrouvons l'équation de Lyapounov (3.5) avec  $\begin{cases} A = S_i \\ X = X_1'X_2 - X_2'X_1 \\ Q = 0_{n \times n} \end{cases}$   
 comme  $S_i$  est stable (ses valeurs propres sont à l'intérieur du cercle unité par a.),  
 le lemme (3.4.1) nous dit que l'équation de Lyapounov (3.5) admet une solution  
 unique

$$X_1'X_2 - X_2'X_1 = \sum_{k=0}^{\infty} S_i^k ' 0_{n \times n} S_i^k = 0_{n \times n}$$

ii.  $X_1'X_2$  est semi-définie positive si les matrices P et Q sont semi-définies positives.

Notons  $M = X_1'X_2 = X_2'X_1$ . Nous devons montrer que M est semi-définie positive.

Pré-multiplions (3.9) par  $S_i'X_2'$ , nous avons :

$$S_i'X_2'AX_1 = S_i'MS_i + S_i'X_2'PX_2S_i \quad (3.12)$$

Transposons (3.10), nous avons :

$$X_2' = X_1'Q + S_i'X_2'A \text{ car } Q \text{ est symétrique}$$

Post-multiplions cette équation par  $X_1$ , nous avons alors

$$S_i'X_2'AX_1 = M - X_1'QX_1 \quad (3.13)$$

Soustrayons (3.13) de (3.12), nous avons alors :

$$S_i'MS_i - M + S_i'X_2'PX_2S_i + X_1'QX_1 = 0$$

Nous obtenons à nouveau une équation de Lyapounov (3.5) avec :

$$\begin{cases} A = S_i \\ X = M \\ Q = S_i'X_2'PX_2S_i + X_1'QX_1 \end{cases}$$

De même qu'en i.  $S_i$  est stable, la solution unique de cette équation de Lyapounov est  $M = \sum_{k=0}^{\infty} S_i^k '(S_i'X_2'PX_2S_i + X_1'QX_1)S_i^k$ . Nous avons donc grâce à cette expression que M est semi-définie positive car P et Q sont semi-définies positives par hypothèse. ■



Nous montrons par le lemme qui va suivre qu'à partir d'une paire symplectique, la fonction Ric permet de construire une solution symétrique stabilisante d'une équation de Riccati.

### Lemme 3.5.2 (Construction d'une solution de Riccati)

Soit une paire symplectique  $S$  de la forme :

$$\left( \begin{pmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & A' \end{pmatrix} \right)$$

où  $A, I, P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P, Q$  sont symétriques et semi-définies positives.

Soit  $S \in \text{dom Ric}$  et  $X = \text{Ric}(S)$ . Alors

1.  $X$  est symétrique.
2.  $(I + PX)^{-1}A$  est stable.
3.  $X$  satisfait l'équation de Riccati (3.4) i.e.  $A'X(I + PX)^{-1}A - X + Q = 0$ .

#### Preuve

i.  $X$  est symétrique

Nous savons par hypothèse que  $S \in \text{dom Ric}$ ,  $S$  n'a donc pas de valeur propre sur la frontière du disque unité. Nous pouvons donc appliquer le point i. du lemme (3.5.1) avec  $X_1 = I$  et  $X_2 = X$  et  $\text{Ric}(S) = X$  où  $\mathcal{X}_i(S) = \text{Im} \begin{pmatrix} I \\ X \end{pmatrix}$ , nous avons alors  $X_1'X_2 = X_2'X_1$  donne  $X = X'$  d'où  $X$  est symétrique.

ii.  $(I + PX)^{-1}A$  est stable

a. De même qu'en i., prenons  $X_1 = I$  et  $X_2 = X$  dans les équations (3.9) et (3.10) du lemme (3.5.1), nous avons alors (en remplaçant  $S_i$  par une matrice semblable) :

$$A = (I + PX)S_i \tag{3.14}$$

$$X = Q + A'XS_i \tag{3.15}$$

b. Montrons que  $I + PX$  est régulière.

Nous savons que les matrices  $P$  et  $Q$  sont semi-définies positives par hypothèse. Appliquons le point (ii) du lemme (3.5.1), nous avons  $X_1'X_2 = X$  est semi-définie positive.

Les matrices  $P$  et  $X$  étant semi-définies positives, les valeurs propres de  $PX$  ne sont pas négatives car les valeurs propres non-nulles de  $PX$  sont des valeurs propres de  $X^{\frac{1}{2}}PX^{\frac{1}{2}}$  qui est semi-définie positive. Nous avons donc que la matrice  $I+PX$  est régulière.

c. Comme  $I+PX$  est régulière, (3.14) nous dit que

$$S_i = (I + PX)^{-1}A \quad (3.16)$$

Nous savons que  $S_i$  est stable (lemme 3.5.1), nous avons donc  $(I + PX)^{-1}A$  est stable.

iii. Montrons que nous avons l'équation de Riccati (3.4)

Introduisons (3.16) dans l'équation (3.15), nous obtenons :

$$X = Q + A'X(I + PX)^{-1}A \quad (3.17)$$

ou encore

$$A'X(I + PX)^{-1}A - X + Q = 0 \quad (3.18)$$

qui est le résultat attendu. ■

*Le théorème suivant ne va être utilisé que dans la démonstration du lemme (4.2.1). Il donne des conditions telles que si elles sont respectées, nous avons que la paire symplectique appartient à dom Ric.*

**Théorème 3.5.1 (Conditions suffisantes d'appartenance à dom Ric)**

Soit une paire symplectique  $S$  de la forme :

$$\left( \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C'C & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & BB' \\ 0 & A' \end{pmatrix} \right)$$

où  $A, I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $P=BB', Q=C'C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont symétriques et semi-définies positives,

avec  $(A, B)$  stabilisable et  $\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda \text{ tel que } |\lambda| = 1$

Alors  $S \in \text{dom Ric}$  et  $\text{Ric}(S)$  est semi-défini positif. Si de plus,  $(C, A)$  est observable alors  $\text{Ric}(S)$  est défini positif

## Preuve

### Etape 1

Montrons  $S \in \text{dom Ric}$

#### 1. $S$ n'a pas de valeurs propres sur $\delta\mathbb{D}$

Par l'absurde, supposons que  $S$  à la valeur propre  $e^{j\theta}$  et que  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  est le vecteur propre associé, nous avons :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C'C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = e^{j\theta} \begin{pmatrix} I & BB' \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

ce système donne lieu d'une part à :

$$Ax = e^{j\theta}x + e^{j\theta}BB'z$$

$$(A - e^{j\theta})x = e^{j\theta}BB'z \quad (3.19)$$

$$e^{-j\theta}z^*(A - e^{j\theta})x = \|B'z\|^2 \quad (3.20)$$

et d'autre part à :

$$-C'Cx + Iz = e^{j\theta}A'z$$

$$-C'Cx = (e^{j\theta}A' - I)z \quad (3.21)$$

$$-\|Cx\|^2 = e^{j\theta}x^*(A' - e^{-j\theta})z$$

$$-\|Cx\|^2 = e^{-j\theta}z^*(A - e^{j\theta})x \quad (3.22)$$

(3.20) et (3.22) donnent :  $-\|Cx\|^2 = \|B'z\|^2$  ou encore

$$B'z = Cx = 0 \quad (3.23)$$

Ce résultat, dans les équations (3.19) et (3.21), nous dit que :

$$(A - e^{j\theta})x = 0 \quad (3.24)$$

$$(e^{j\theta}A' - I)z = 0 \quad (3.25)$$

De (3.23), (3.24) et (3.25), nous tirons les équations :

$$z^*(A - e^{j\theta} \quad B) = 0$$

$$\begin{pmatrix} A - e^{j\theta} \\ C \end{pmatrix} x = 0$$

Comme par hypothèse  $(A,B)$  stabilisable, le théorème (1.5.1) implique  $z=0$ . Par hypothèse  $\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} = n \ \forall \lambda$  tel que  $|\lambda| = 1$ . Nous avons ici  $\lambda = e^{j\theta}$  ce qui implique  $x=0$ . Par conséquent le vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  est le vecteur nul, ce qui est impossible car le vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$  est un vecteur propre.

$S$  n'a donc pas de valeurs propres sur la frontière du disque unité.

2. Les sous-espaces  $\mathcal{X}_i(S)$  et  $\text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}$  sont complémentaires

Remarque : par le point 1.,  $S$  n'a pas de valeurs propres sur la frontière du disque unité et comme de plus  $Q = C'C$  et  $P = BB'$  sont semi-définies positives nous pouvons utiliser les résultats du lemme (3.5.1).

a. Montrons que  $\text{Ker } X_1$  est  $S_i$ -invariant i.e.  $x \in \text{Ker } X_1 \implies S_i x \in \text{Ker } X_1$

Prenons un vecteur  $x \in \text{Ker } X_1$  et montrons que  $S_i x \in \text{Ker } X_1$ .

Pré-multiplions l'équation (3.9) par  $x'S'_i X'_2$  et post-multiplions la par  $x$ , nous arrivons à :

$$x'S'_i X'_2 A X_1 x = x'S'_i X'_2 X_1 S_i x + x'S'_i X'_2 B B' X_2 S_i x$$

Le membre de gauche est nul, en effet,  $X_1 x = 0$  car  $x \in \text{Ker } X_1$ . Le premier terme du membre de droite est non-négatif car  $X'_2 X_1$  est semi-défini positif par le lemme (3.5.1). Le deuxième est non-négatif car il peut se mettre sous la forme  $\| B' X_2 S_i x \|^2$ . Nous avons donc deux termes non-négatifs à droite et un terme nul à gauche, ce qui implique que les termes du membre de droite sont nuls et entre autre que

$$B' X_2 S_i x = 0 \tag{3.26}$$

Post-multiplions maintenant l'équation (3.9) par  $x$ , nous obtenons :  $A X_1 x = X_1 S_i x + B B' X_2 S_i x$  ou encore  $X_1 S_i x = 0$  car  $X_1 x = 0$  et  $B' X_2 S_i x = 0$ .

Comme  $X_1 S_i x$  est nul, nous avons que  $S_i x \in \text{Ker } X_1$ .

Nous avons donc obtenu  $\text{Ker } X_1$  est  $S_i$ -invariant.

b. Montrons que  $X_1$  est non singulière.

Par l'absurde,  $\text{Ker} X_1 \neq 0$

Comme  $\text{Ker} X_1$  est  $S_i$ -invariant  $\exists \mu \in \sigma(S_i)$  et  $x \in \text{Ker} X_1$  tel que

$$S_i x = \mu x \quad (3.27)$$

Comme  $S_i$  est stable, nous avons  $|\mu| < 1$ .

Cas 1 :  $\mu \neq 0$

Post-multiplions (3.10) par  $x$ , nous avons :

$$X_2 x = Q X_1 x + A' X_2 S_i x$$

Introduisons (3.27) dans cette expression :

$$X_2 x = Q X_1 x + \mu A' X_2 x$$

Comme  $x \in \text{Ker} X_1$ , nous avons :

$$(\mu A' - I) X_2 x = 0$$

(3.27) et (3.26) donnent  $B' X_2 S_i x = B' X_2 \mu x = 0$ , de sorte que :

$$B' X_2 x = 0$$

Associions les deux dernières équations obtenues pour former l'expression :  
 $x^* X_2' (A - \frac{I}{\mu} \quad B) = 0$

Par hypothèse, nous avons  $(A, B)$  stabilisable. Il en résulte, par le théorème (1.5.1), que  $X_2 x = 0$  car  $|\frac{1}{\mu}| > 1$

Nous avons donc  $X_1 x = X_2 x = 0$  implique  $x = 0$  car  $\text{rang} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = n$ , c'est une contradiction car  $x$  est un vecteur non nul de  $\text{Ker} X_1$ .

Cas 2 :  $\mu = 0$

Il suit aussi que  $X_1 x = X_2 x = 0$ , nous avons donc la même contradiction que dans le cas 1.

### c. Preuve de 2

$X_1$  est non singulière par b. par conséquent  $\mathcal{X}_i(S) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  et  $\text{Im} \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}$  sont complémentaires



## Etape 2

Montrons que  $\text{Ric}(S)$  est semi-défini positif

A l'étape 1, nous avons obtenu  $S \in \text{dom Ric}$ , soit  $X = \text{Ric}(S)$ . Nous avons que  $X$  est semi-défini positif en vertu du lemme (3.5.2) et du fait que  $P = BB'$  et  $Q = C'C$  sont semi-définies positives.

## Etape 3

Montrons que  $\text{Ric}(S)$  est défini positif si la paire  $(C, A)$  est observable

1. Etant donné que  $X = \text{Ric}(S)$  (Etape 2) et que  $S \in \text{dom Ric}$  (Etape 1) et que  $P = BB'$  et  $Q = C'C$  sont semi-définies positives, nous pouvons utiliser les résultats obtenus au lemme (3.5.2). Dans ce lemme, nous avons l'équation de Riccati :

$$A'X(I + BB'X)^{-1}A - X + C'C = 0 \quad (3.28)$$

Nous allons transformer cette équation de façon à obtenir une équation de Lyapounov.

Commençons par définir deux matrices :

$$\begin{aligned} F &= -(I + B'XB)^{-1}B'XA \\ &= -B'X(I + BB'X)^{-1}A \\ \text{et } A_F &= A + BF \\ &= A - BB'X(I + BB'X)^{-1}A \\ &= (I + BB'X)^{-1}A \end{aligned}$$

Notons que  $F = -B'XA_F$ .

L'équation de Riccati (3.28) devient successivement :

$$\begin{aligned} A'X(I + BB'X)^{-1}A - X + C'C &= 0 \\ A'XA_F - X + C'C &= 0 \\ A'_F(I + XBB')XA_F - X + C'C &= 0 \\ A'_FXA_F - X + A'_FxBB'XA_F + C'C &= 0 \\ A'_FXA_F - X + F'F + C'C &= 0 \end{aligned}$$

C'est une équation de Lyapounov, comme  $A_F$  est stable, elle admet une solution unique :

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} A_F^k {}' (F'F + C'C) A_F^k$$

2. Nous avons montré à l'étape 2 que  $\text{Ric}(S)$  est semi-défini positif, montrons maintenant que  $X = \text{Ric}(S)$  est défini positif i.e. si  $x'Xx=0$  alors  $x=0$ .

Par 1., nous savons :

$$x'Xx = x' \left( \sum_{k=0}^{\infty} A_F^k {}' (F'F + C'C) A_F^k \right) x \quad (3.29)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \| F A_F^k x \|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \| C A_F^k x \|^2 \quad (3.30)$$

De par cette dernière équation, nous avons que si  $x'Xx=0$  alors  $CA_F^k x = 0 \forall k \geq 0$  et  $FA_F^k x = 0 \forall k \geq 0$ .

Ces équations nous donnent par récurrence  $CA^k x = 0 \forall k \geq 0$ .  $(C,A)$  étant observable par hypothèse, nous avons par définition que le seul état inobservable est l'état nul :  $x=0$ . ■

# Chapitre 4

## Lemmes préliminaires au théorème 5.2.1

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous démontrons trois lemmes qui nous permettent d'alléger la démonstration du théorème (5.2.1) : minimisation de l'impact de la perturbation sur la sortie du système  $H$  décrit par :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + B_1\omega + B_2v \\ \zeta &= C_1\xi + D_{11}\omega + D_{12}v\end{aligned}\tag{4.1}$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^n$  avec  $\xi(0) = 0$   $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$   
 $v \in \mathbb{R}^m$   $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times l}$   $D_{11} \in \mathbb{R}^{p \times l}$   
 $\zeta \in \mathbb{R}^p$   $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$   $D_{12} \in \mathbb{R}^{p \times m}$   
 $\omega = \delta_d \omega_0 \in \mathbb{R}^l$  où  $\omega_0 \in \mathbb{R}^l$  et  $\delta_d$  est l'impulsion unité de Dirac  
 $A, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12}$  sont des matrices constantes

soumis aux hypothèses :

$$1. (A, B_2) \text{ est stabilisable} \tag{4.2}$$

$$2. M := D'_{12}D_{12} \text{ est régulière} \tag{4.3}$$

$$3. \text{ La matrice } \begin{pmatrix} A - \lambda & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} \text{ est de rang (colonne) plein } \forall \lambda \in \delta\mathbb{D}. \tag{4.4}$$

### 4.2 Lemme : paire symplectique associée au système $H = [A, (B_1 \ B_2), C_1, (D_{11} \ D_{12})]$

Nous construisons dans ce premier lemme une paire symplectique  $S_2$  de dom Ric à partir de la description du système  $H$ . Nous nous basons sur le théorème



(3.5.1) qui donnait des conditions suffisantes d'appartenance au domaine de la fonction Ric.

**Lemme 4.2.1 (Paire symplectique associée au système H)**

Soit  $A, B_2, C_2, D_{12}, M$  qui vérifient (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4)

alors la paire symplectique

$$S_2 = \left( \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 & 0 \\ -C'_1 (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & B_2 M^{-1} B'_2 \\ 0 & (A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1)' \end{pmatrix} \right)$$

appartient à  $\text{dom Ric}$

**Preuve**

Nous allons appliquer le théorème (3.5.1) avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 \\ \mathcal{B} &= B_2 M^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{C} = (I - D_{12} M^{-1} D'_{12})^{\frac{1}{2}} C_1 \quad (4.6)$$

$$\mathcal{S} = S_2 \quad (4.7)$$

Remarque : les éléments du théorème (3.5.1) ont été écrits en lettres rondes afin de les distinguer de ceux de ce lemme.

A. Montrons que  $S_2$  vérifie effectivement les hypothèses de ce théorème, c'est-à-dire

1.  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  stabilisable

 (4.8)

Par l'absurde :

$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  n'est pas stabilisable

$$\iff \text{rang}(\mathcal{A} - \lambda I \quad \mathcal{B}) < n \text{ où } \lambda \text{ est tel que } |\lambda| \geq 1 \text{ par le théorème (1.5.1)}$$

$$\iff \text{rang}(A - I\lambda - B_2 M^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} D'_{12} C_1 \quad B_2 M^{-\frac{1}{2}}) < n \text{ où } \lambda \text{ est tel que } |\lambda| \geq 1 \text{ par (4.5)}$$

$$\text{or } (A - I\lambda - B_2 M^{-\frac{1}{2}} M^{-\frac{1}{2}} D'_{12} C_1 \quad B_2 M^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$(A - I\lambda \quad B_2 M^{-\frac{1}{2}}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M^{-\frac{1}{2}} D'_{12} C_1 & I \end{pmatrix}$$

$$\iff \text{rang}(A - I\lambda \quad B_2 M^{-\frac{1}{2}}) < n \text{ où } \lambda \text{ est tel que } |\lambda| \geq 1$$

$$\text{or } (A - I\lambda \quad B_2 M^{-\frac{1}{2}}) = (A - I\lambda \quad B_2) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \text{ où } M^{-\frac{1}{2}} \text{ est régulière (4.3)}$$

$$\iff \text{rang}(A - I\lambda \quad B_2) < n \text{ où } \lambda \text{ est tel que } |\lambda| \geq 1$$

$$\iff (A, B_2) \text{ n'est pas stabilisable par le théorème (1.5.1)}$$

ce qui est en contradiction avec (4.2).

Nous obtenons donc (4.8).

$$\boxed{2. \text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \delta \mathbb{D}} \quad (4.9)$$

1. Montrons

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda \\ (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \delta \mathbb{D} \quad (4.10)$$

Nous avons :  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda & 0 \\ (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m \quad \forall \lambda \in \delta \mathbb{D}$

en effet,  $\begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda & 0 \\ (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda & 0 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M^{-1} D'_{12} C_1 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -B_2 M^{-1} D'_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - \lambda I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M^{-1} D'_{12} C_1 & I \end{pmatrix} \text{ par (4.3).}$$

Les première et troisième matrices du membre de droite sont non singulières tandis que la deuxième est de rang  $n+m$  par (4.4).

Nous avons donc  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda \\ (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \delta \mathbb{D}$

car  $\begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda \\ (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda & 0 \\ (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 & D_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}$

Note : observons que (4.10) ressemble très fort à (4.9), car par (4.6) la seule différence réside dans la puissance moitié pour  $I - D_{12} M^{-1} D'_{12}$ .

2. Montrons (4.9) i.e.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - \mathcal{A} \\ \mathcal{C} \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 - I\lambda \\ (I - D_{12} M^{-1} D'_{12})^{\frac{1}{2}} C_1 \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \delta \mathbb{D}$$

a. Montrons que  $(I - D_{12} M^{-1} D'_{12})$  est semi-définie positive.

Commençons par définir la matrice  $P := D_{12} M^{-1} D'_{12}$ .

Nous pouvons observer que :

$$\begin{aligned} P &= P' \text{ est semi-définie positive} \\ P &= P^2 \end{aligned}$$

Nous avons par conséquent que les valeurs propres de  $P$  sont égales, soit à 0, soit à 1 (i.e.  $\sigma(P) \subseteq \{0, 1\}$ ) et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x'Px \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2 \leq \|x\|^2$$

Nous obtenons  $I-P$  est symétrique tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x'(I-P)x \geq 0$$

Nous avons donc finalement  $(I-P)=(I-P)'$  semi-définie positive.

b. Montrons  $(I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1x = 0 \iff (I - D_{12}M^{-1}D'_{12})^{\frac{1}{2}}C_1x = 0$  ou encore avec  $E = (I - D_{12}M^{-1}D'_{12}) : EC_1x = 0 \iff E^{\frac{1}{2}}C_1x = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{vrai car} \quad & \implies EC_1x = 0 \implies x'C'_1EC_1x = 0 \implies E^{\frac{1}{2}}C_1x = 0 \\ & \iff E^{\frac{1}{2}}C_1x = 0 \implies E^{\frac{1}{2}}E^{\frac{1}{2}}C_1x = 0 \implies EC_1x = 0 \end{aligned}$$

c. Nous avons donc

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A - B_2M^{-1}D'_{12}C_1 - I\lambda \\ (I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1 \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \delta\mathbb{D} \text{ par (4.10)}$$

$\implies$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A - B_2M^{-1}D'_{12}C_1 - I\lambda \\ (I - D_{12}M^{-1}D'_{12})^{\frac{1}{2}}C_1 \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \delta\mathbb{D} \text{ par a. et b.}$$

#### B. Preuve du théorème.

Les hypothèses du théorème (3.5.1) sont vérifiées (cfr point A). Nous l'appliquons et nous obtenons  $S_2 = \mathfrak{S} \in \text{dom Ric}$ .

■

### 4.3 Lemme : espace d'appartenance de $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c$

Nous montrons dans cette partie l'appartenance de  $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c$  ( $\hat{g}_i, \hat{g}_c$  seront définies respectivement en (4.20) et (4.19)) à l'ensemble  $\mathcal{RH}_2(\mathbb{D})^\perp$ . Ce résultat sera utilisé à l'étape 2 du théorème principal (5.2.1).

#### **Lemme 4.3.1 (Espace d'appartenance de $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c$ )**

Soit  $A, B_2, C_2, D_{12}, M$  qui vérifient (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4)

alors  $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c \in \mathcal{RH}_2(\mathbb{D})^\perp$  où

$$S_2 = \left( \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 & 0 \\ -C'_1 (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & B_2 M^{-1} B'_2 \\ 0 & (A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1)' \end{pmatrix} \right) \quad (4.11)$$

$$X = Ric(S_2) \quad (4.12)$$

$$F = -(M + B'_2 X B_2)^{-1} (B'_2 X A + D'_{12} C_1) \quad (4.13)$$

$$F_0 = -(M + B'_2 X B_2)^{-1} (B'_2 X B_1 + D'_{12} D_{11}) \quad (4.14)$$

$$A_F = A + B_2 F \quad (4.15)$$

$$C_{1F} = C_1 + D_{12} F \quad (4.16)$$

$$B_{1F} = B_1 + B_2 F_0 \quad (4.17)$$

$$D_{11F} = D_{11} + D_{12} F_0 \quad (4.18)$$

$$\hat{g}_c = D_{11F} + \lambda C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} \quad (4.19)$$

$$\hat{g}_i = D_{12} + \lambda C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_2 \quad (4.20)$$

$$\hat{g}^\sim(\lambda) = \hat{g}(\lambda^{-1})' \quad (4.21)$$

*La démonstration qui va suivre est assez longue. Pour vous en faciliter la lecture, nous avons encadré les différentes étapes qui la décrivent. Chaque étape est suivie d'une explication ou démonstration afin de montrer que ce qui est annoncé est vrai.*

### Preuve

Méthode de travail

(4.22)

1. Rappel : nous savons que  $\mathcal{RH}_2(\mathbb{D})$  est l'ensemble des éléments rationnels de  $\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$  qui est l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\overset{\circ}{\mathbb{D}}$  de carré intégrable sur  $\delta\mathbb{D}$ . Notons que  $\mathcal{RH}_2(\mathbb{D})^\perp$  est le complémentaire orthogonal de  $\mathcal{RH}_2(\mathbb{D})$ , c'est donc l'ensemble des fonctions de transfert holomorphes sur  $|\lambda| > 1$  et de carré intégrable sur  $\delta\mathbb{D}$ .

2. Nous allons calculer le développement en série de Laurent de  $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c$ . Nous allons montrer qu'il peut se mettre sous la forme  $\sum_{k=-\infty}^{-1} E_k \lambda^k$  et que  $A_F$  est stable.

Nous aurons alors que  $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c$  appartient à  $\mathcal{RH}_2(\mathbb{D})^\perp$  car, par son développement en série, le support de la fonction temporelle correspondante est dans  $\mathbb{Z}_-^0$ . Il suit alors que  $\hat{g}_i \sim \hat{g}_c$  sera holomorphe sur  $|\lambda| > 1$  et de carré intégrable sur  $\delta\mathbb{D}$ .

Montrons que nous avons l'équation  
 $A_F' X A_F - X + C_{1F}' C_{1F} = 0$

(4.23)

1. Par le lemme (3.5.2), si  $\mathcal{S}$  est une paire symplectique telle que  
 $\mathcal{S} = \left( \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ -\mathcal{Q} & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & \mathcal{P} \\ 0 & \mathcal{A}' \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ -\mathcal{C}'\mathcal{C} & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ 0 & \mathcal{A}' \end{pmatrix} \right)$   
 où  $\mathcal{S} \in \text{dom Ric}$  et  $X = \text{Ric}(\mathcal{S})$ , alors  $X$  satisfait à l'équation de Riccati :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' X (I + \mathcal{P} X)^{-1} \mathcal{A} - X + \mathcal{Q} &= 0 \\ \mathcal{A}' X (I + \mathcal{B}\mathcal{B}' X)^{-1} \mathcal{A} - X + \mathcal{C}'\mathcal{C} &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec  $X$  symétrique.

Nous allons montrer que l'équation de Riccati (4.24) peut se mettre sous la forme de l'équation de Lyapounov (4.23).

Définissons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -(I + \mathcal{B}' X \mathcal{B})^{-1} \mathcal{B}' X \mathcal{A} \\ &= -\mathcal{B}' X (I + \mathcal{B}\mathcal{B}' X)^{-1} \mathcal{A} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{F}} &= \mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{F} \\ &= \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{B}' X (I + \mathcal{B}\mathcal{B}' X)^{-1} \mathcal{A} \\ &= (I + \mathcal{B}\mathcal{B}' X)^{-1} \mathcal{A} \end{aligned} \quad (4.26)$$

où  $\mathcal{A}_F$  est stable par le lemme (3.5.2).

Grâce à cette dernière égalité, (4.24) se met sous la forme :

$$\mathcal{A}' X \mathcal{A}_{\mathcal{F}} - X + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0 \quad (4.27)$$

or (4.26) donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \mathcal{A}_{\mathcal{F}}' (I + \mathcal{B}\mathcal{B}' X)' \\ &= \mathcal{A}_{\mathcal{F}}' + \mathcal{A}_{\mathcal{F}}' X \mathcal{B}\mathcal{B}' \end{aligned}$$

dans (4.27) :

$$\mathcal{A}_F' X \mathcal{A}_{\mathcal{F}} - X + \mathcal{A}_{\mathcal{F}}' X \mathcal{B}\mathcal{B}' X \mathcal{A}_{\mathcal{F}} + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0 \quad (4.28)$$

or, en vertu de (4.25) et (4.26) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\mathcal{B}' X (I + \mathcal{B}\mathcal{B}' X)^{-1} \mathcal{A} \\ &= -\mathcal{B}' X \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$



dans (4.28) :

$$\mathcal{A}'_F X \mathcal{A}_F - X + \mathcal{F}'\mathcal{F} + \mathcal{C}'\mathcal{C} = 0 \quad (4.29)$$

2. Identifions les paires symplectiques  $\mathcal{S}$  et  $S_2$

Ici, nous avons la paire symplectique

$$S_2 = \left( \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 & 0 \\ -C'_1 (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & B_2 M^{-1} B'_2 \\ 0 & (A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1)' \end{pmatrix} \right)$$

qui vérifie les hypothèses du lemme (3.5.2) en vertu du lemme (4.2.1). Identifions les éléments de  $S_2$  à ceux de  $\mathcal{S}$ , nous avons :

$$\mathcal{A} = A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 \quad (4.30)$$

$$\mathcal{B} = B_2 M^{-\frac{1}{2}} \quad (4.31)$$

$$\mathcal{C} = (I - D_{12} M^{-1} D'_{12})^{\frac{1}{2}} C_1 \quad (4.32)$$

3. Montrons

$$\mathcal{A}_F = A_F \quad (4.33)$$

*Note : comme  $\mathcal{A}_F$  est stable par le lemme (3.5.2), nous avons que  $A_F$  est stable tel que par (4.20) et (4.19)  $\hat{g}_i \hat{g}_c$  n'a pas de pôles sur le cercle unité : nous obtenons  $\hat{g}_i \hat{g}_c \in \mathcal{L}_2(\delta\mathbb{D})$ .*

En effet (4.26),(4.31),(4.30),(4.13) et (4.15) donnent :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F &= (I + \mathcal{B}\mathcal{B}'X)^{-1} \mathcal{A} \\ &= (I + B_2 M^{-1} B'_2 X)^{-1} (A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1) \\ &= (I + B_2 M^{-1} B'_2 X)^{-1} A - (I + B_2 M^{-1} B'_2 X)^{-1} B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 \\ &= A - (I + B_2 M^{-1} B'_2 X)^{-1} B_2 M^{-1} B'_2 X A - (I + B_2 M^{-1} B'_2 X)^{-1} B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 \\ &= A - (I + B_2 M^{-1} B'_2 X)^{-1} B_2 M^{-1} (B'_2 X A + D'_{12} C_1) \\ &= A - B_2 (I + M^{-1} B'_2 X B_2)^{-1} M^{-1} (B'_2 X A + D'_{12} C_1) \\ &= A - B_2 (M + B'_2 X B_2)^{-1} (B'_2 X A + D'_{12} C_1) \\ &= A + B_2 F \\ &= A_F \end{aligned}$$

4. Montrons

$$C'_{1F} C_{1F} = \mathcal{F}'\mathcal{F} + \mathcal{C}'\mathcal{C} \quad (4.34)$$

$$a. M^{\frac{1}{2}} F = \mathcal{F} - M^{-\frac{1}{2}} D'_{12} C_1$$

Nous allons le montrer en utilisant (4.13),(4.31),(4.30),(4.26) et (4.25)

$$\begin{aligned}
M^{\frac{1}{2}}F &= -M^{\frac{1}{2}}(M + B'_2XB_2)^{-1}(B'_2XA + D'_{12}C_1) \\
&= -M^{\frac{1}{2}}(M^{\frac{1}{2}}(I + M^{-\frac{1}{2}}B'_2XB_2M^{-\frac{1}{2}})M^{\frac{1}{2}})^{-1}(B'_2XA + D'_{12}C_1) \\
&= -(I + \mathcal{B}'X\mathcal{B})^{-1}M^{-\frac{1}{2}}(B'_2XA + D'_{12}C_1) \\
&= -(I + \mathcal{B}'X\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}'XA + M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}C_1) \\
&= -(I + \mathcal{B}'X\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}'X(A + B_2M^{-1}D'_{12}C_1) + M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}C_1) \\
&= -(I + \mathcal{B}'X\mathcal{B})^{-1}(\mathcal{B}'XA + (\mathcal{B}'X\mathcal{B} + I)M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}C_1) \\
&= -\mathcal{B}'X(I + \mathcal{B}\mathcal{B}'X)^{-1}A - M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}C_1 \\
&= -\mathcal{B}'XA_F - M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}C_1 \\
&= \mathcal{F} - M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}C_1
\end{aligned}$$

$$\text{b. } C_{1F} = D_{12}M^{-\frac{1}{2}} + (I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1$$

Nous allons le montrer en utilisant (4.16 et le point 1)

$$\begin{aligned}
C_{1F} &= C_1 + D_{12}F \\
&= C_1 + D_{12}M^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}F \\
&= C_1 + D_{12}M^{-\frac{1}{2}}(\mathcal{F} - M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}C_1) \\
&= D_{12}M^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F} + (I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1
\end{aligned}$$

c. Résultat de l'étape.

$$\begin{aligned}
C'_{1F}C_{1F} &= (D_{12}M^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F})'(D_{12}M^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}) \\
&+ (D_{12}M^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F})'((I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1) \\
&+ ((I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1)'(D_{12}M^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}) \\
&+ ((I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1)'((I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1) \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Or par (4.3) :  $M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}D_{12}M^{-\frac{1}{2}} = M^{-\frac{1}{2}}MM^{-\frac{1}{2}} = I$ .

Nous avons alors  $(I - D_{12}M^{-1}D'_{12})'D_{12}M^{-\frac{1}{2}} = D_{12}M^{-\frac{1}{2}} - D_{12}M^{-1}D'_{12}D_{12}M^{-\frac{1}{2}} = 0$  et  $M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}(I - D_{12}M^{-1}D'_{12}) = M^{-\frac{1}{2}}D'_{12} - M^{-\frac{1}{2}}D'_{12}D_{12}M^{-\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}D'_{12} = 0$  et finalement  $(I - D_{12}M^{-1}D'_{12})'(I - D_{12}M^{-1}D'_{12}) = I - D_{12}M^{-1}D'_{12}$

Au moyen de cette information, nous pouvons déduire de (4.35 et 4.32) :

$$\begin{aligned}
C'_{1F}C_{1F} &= \mathcal{F}'\mathcal{F} + C'_1(I - D_{12}M^{-1}D'_{12})C_1 \\
&= \mathcal{F}'\mathcal{F} + \mathcal{C}'\mathcal{C}
\end{aligned}$$

5. En introduisant (4.33) et (4.34) dans (4.29), nous avons le résultat (4.23).

$$\begin{aligned} &\text{Montrons que nous avons :} \\ &(I - \lambda^{-1}A'_F)^{-1}C'_{1F}C_{1F}(I - \lambda A_F)^{-1} \\ &\quad = (I - \lambda^{-1}A'_F)^{-1}X + X(I - \lambda A_F)^{-1} - X \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nous savons (4.23)

$$\begin{aligned} C'_{1F}C_{1F} &= X - A'_F X A_F \\ &= 2X - X - \lambda^{-1}A'_F X A_F \lambda \\ &= X(I - \lambda A_F) + (I - \lambda^{-1}A'_F)X - X + X\lambda A_F + \lambda^{-1}A'_F X - \lambda^{-1}A'_F X A_F \lambda \\ &= X(I - \lambda A_F) + (I - \lambda^{-1}A'_F)X - (I - \lambda^{-1}A'_F)X(I - \lambda A_F) \end{aligned}$$

En prémultipliant et postmultipliant cette inégalité respectivement par  $(I - \lambda^{-1}A'_F)^{-1}$  et  $(I - \lambda A_F)^{-1}$ , nous arrivons effectivement à l'expression voulue.

$$\text{Montrons : } B'_2 X B_{1F} + D'_{12} D_{11F} = 0 \quad (4.37)$$

Par (4.17),(4.18),(4.3) et (4.14)

$$\begin{aligned} B'_2 X B_{1F} + D'_{12} D_{11F} &= B'_2 X (B_1 + B_2 F_0) + D'_{12} (D_{11} + D_{12} F_0) \\ &= B'_2 X B_1 + D'_{12} D_{11} + (B'_2 X B_2 + M) F_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Montrons : } B'_2 X A_F + D'_{12} C_{1F} = 0 \quad (4.38)$$

Par (4.15),(4.16),(4.3) et (4.13)

$$\begin{aligned} B'_2 X A_F + D'_{12} C_{1F} &= B'_2 X (A + B_2 F) + D'_{12} (C_1 + D_{12} F) \\ &= B'_2 X A + D'_{12} C_1 + (B'_2 X B_2 + M) F \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Montrons : } A'_F X B_{1F} + C'_{1F} D_{11F} = A'_F X B_1 + C'_{1F} D_{11} \quad (4.39)$$

Par (4.17),(4.18),(4.15),(4.16) et (4.3) :

$$\begin{aligned}
 A'_F X B_{1F} + C'_{1F} D_{11F} &= A'_F X (B_1 + B_2 F_0) + C'_{1F} (D_{11} + D_{12} F_0) \\
 &= A'_F X B_1 + C'_{1F} D_{11} + (A'_F X B_2 + C'_{1F} D_{12}) F_0 \\
 &= A'_F X B_1 + C'_{1F} D_{11}
 \end{aligned}$$

car  $F = -(M + B'_2 X B_2)^{-1} (B'_2 X A + D'_{12} C_1)$  par (4.13)

donne  $(M + B'_2 X B_2) F = -(B'_2 X A + D'_{12} C_1)$   
ou encore  $F'(M + B'_2 X B_2) = -(A' X B_2 + C'_1 D_{12})$   
en réarrangeant les termes

$$\begin{aligned}
 A' X B_2 + F' B'_2 X B_2 + C'_1 D_{12} + F' D'_{12} D_{12} &= 0 \\
 (A' + F' B'_2) X B_2 + (C'_1 + F' D'_{12}) D_{12} &= 0 \\
 A'_F X B_2 + C'_{1F} D_{12} &= 0
 \end{aligned}$$

Calcul de la matrice  $\hat{g}_i \hat{g}_c$

Les matrices de transfert de  $\hat{g}_i$  et  $\hat{g}_c$  sont données respectivement en (4.20) et (4.19). La fonction de transfert  $\hat{g}_c$  est donc (cfr 4.19) :

$$\hat{g}_c = D_{11F} + \lambda C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F}$$

Nous savons (4.21)

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_i^\sim(\lambda) &= \hat{g}_i(\lambda^{-1})' \\
 &= D'_{12} + \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F}
 \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \hat{g}_i^\sim \hat{g}_c &= (D'_{12} + \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F}) (D_{11F} + \lambda C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F}) \\
 &= D'_{12} D_{11F} + \lambda D'_{12} C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} \\
 &\quad + \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} D_{11F} \\
 &\quad + B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F}
 \end{aligned}$$

En introduisant (4.36) dans cette équation :

$$\begin{aligned}
\hat{g}_i^* \hat{g}_c &= D'_{12} D_{11F} + \lambda D'_{12} C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} \\
&\quad + \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} D_{11F} \\
&\quad + B'_2 ((I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} X + X (I - \lambda A_F)^{-1} - X) B_{1F} \\
&= D'_{12} D_{11F} + \lambda D'_{12} C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} + \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} D_{11F} \\
&\quad + B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} X B_{1F} - B'_2 X B_{1F} \\
&\quad + B'_2 X (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} - B'_2 X B_{1F} + B'_2 X B_{1F} \\
&= B'_2 X B_{1F} + D'_{12} D_{11F} + \lambda D'_{12} C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} \\
&\quad + \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} D_{11F} \\
&\quad + B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} \lambda^{-1} A'_F X B_{1F} + B'_2 X \lambda A_F (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} \\
&= (B'_2 X B_{1F} + D'_{12} D_{11F}) + \lambda (B'_2 X A_F + D'_{12} C_{1F}) (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} \\
&\quad + \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} (C'_{1F} D_{11F} + A'_F X B_{1F})
\end{aligned}$$

En introduisant (4.37), (4.38) et (4.39) dans cette dernière équation, nous obtenons finalement avec  $A_F$  stable : pour  $|\lambda| > 1$  et  $A'_F$  stable  $\varrho(\lambda^{-1} A'_F) < 1$  tel

$$\text{que } (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^{-1} A'_F)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k} A_F^k,$$

$$\hat{g}_i^* \hat{g}_c = \lambda^{-1} B'_2 (I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} (A'_F X B_1 + C'_{1F} D_{11})$$

Nous avons maintenant un développement en série qui ne contient que des coefficients  $\lambda^{-k}$  avec  $k \geq 1$ , ce qui termine notre démonstration (cfr (4.22)).

■

## 4.4 Lemme : nouvelle formulation de la matrice

$$\hat{g}_i^* \hat{g}_i$$

Nous donnons ici une formulation plus simple de la matrice  $\hat{g}_i^* \hat{g}_i$  qui sera utilisée à l'étape 3 du théorème principal (5.2.1).

### Lemme 4.4.1 (Nouvelle formulation de la matrice $\hat{g}_i^* \hat{g}_i$ )

Soit  $A, B_2, C_2, D_{12}, M$  qui vérifient (4.1), (4.2), (4.3) et (4.4) alors  $\hat{g}_i^* \hat{g}_i = M + B'_2 X B_2$  où  $M, B_2, \hat{g}_i$  et  $X$  sont respectivement définis en (4.3), (4.1), (4.20) et (4.12).



## Preuve

Nous savons par le lemme précédent que

$$\begin{aligned}\hat{g}_i &= D_{12} + \lambda C_{1F}(I - \lambda A_F)^{-1} B_2 \\ \hat{g}_i^{\sim} &= D'_{12} + \lambda^{-1} B'_2(I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\hat{g}_i^{\sim} \hat{g}_i &= (D'_{12} + \lambda^{-1} B'_2(I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F})(D_{12} + \lambda C_{1F}(I - \lambda A_F)^{-1} B_2) \\ &= D'_{12} D_{12} + \lambda D'_{12} C_{1F}(I - \lambda A_F)^{-1} B_2 \\ &\quad + \lambda^{-1} B'_2(I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} D_{12} \\ &\quad + B'_2(I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} C_{1F}(I - \lambda A_F)^{-1} B_2\end{aligned}$$

par (4.36)

$$\begin{aligned}\hat{g}_i^{\sim} \hat{g}_i &= D'_{12} D_{12} + \lambda D'_{12} C_{1F}(I - \lambda A_F)^{-1} B_2 \\ &\quad + \lambda^{-1} B'_2(I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} C'_{1F} D_{12} \\ &\quad + B'_2((I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} X + X(I - \lambda A_F)^{-1} - X) B_2 \\ &= D'_{12} D_{12} + B'_2 X B_2 + B'_2(I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} (\lambda^{-1} C'_{1F} D_{12} + X B_2) - B'_2 X B_2 \\ &\quad + (\lambda D'_{12} C_{1F} + B'_2 X)(I - \lambda A_F)^{-1} B_2 - B'_2 X B_2 \\ &= D'_{12} D_{12} + B'_2 X B_2 + B'_2(I - \lambda^{-1} A'_F)^{-1} (\lambda^{-1} C'_{1F} D_{12} + \lambda^{-1} A'_F X B_2) \\ &\quad + (\lambda D'_{12} C_{1F} + \lambda B'_2 X A_F)(I - \lambda A_F)^{-1} B_2\end{aligned}$$

En utilisant (4.38) et sa transposée ainsi que (4.3), nous obtenons finalement :  
 $\hat{g}_i^{\sim} \hat{g}_i = M + B'_2 X B_2.$

■

## Chapitre 5

# Minimisation de la norme- $l_2$ de la sortie du système $H$

### 5.1 Introduction

Nous montrons que sous certaines hypothèses (voir théorème 5.2.1) le contrôle optimal du système discret linéaire constant  $H=[A, (B_1 \ B_2), C_1, (D_{11} \ D_{12})]$  lorsqu'il est soumis à une perturbation  $\omega = \delta_d \omega_0$  est un asservissement d'état additionné à une anticipation de perturbation. Nous montrons également que lorsque nous appliquons le contrôle optimal au système  $H$ , ce contrôle est dans  $l_2(\mathbb{Z}_+)$  et que le système en boucle fermée  $\omega \rightsquigarrow \zeta$  est internement stable.

### 5.2 Minimisation de l'impact de la perturbation sur la sortie

Nous énonçons et nous démontrons ici le résultat principal de ce mémoire. Nous avons, en effet, un système discret linéaire constant  $H$  à deux entrées  $\omega$  et  $v$  et une sortie  $\zeta$ . L'entrée  $\omega$  est appelée perturbation et l'entrée  $v$  est appelée contrôle.

Dans un premier temps, nous soumettons le système  $H$  à une perturbation  $\omega = \delta_d \omega_0$  et nous montrons le contrôle  $v$  qui parmi tous les contrôles  $v \in l(\mathbb{Z}_+)$  minimise la norme- $l_2$  de la sortie  $\zeta$  (i.e.  $\|\zeta\|_2$ ). Le contrôle pour lequel le minimum est atteint est appelé **contrôle optimal** et est noté  $v_{opt}$ .

Dans un second temps, nous soumettons le système  $H$  à la perturbation  $\omega = \delta_d \omega_0$  et au contrôle optimal  $v_{opt} = F\xi + F_0\omega$  et nous montrons ce que cela implique.

**Théorème 5.2.1 (Minimisation de l'impact de la perturbation sur la sortie)**  
*Etant donné le système discret linéaire constant  $H$  décrit par :*

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + B_1\omega + B_2v \\ \zeta &= C_1\xi + D_{11}\omega + D_{12}v\end{aligned}\quad (5.1)$$

où  $\xi \in \mathbb{R}^n$  avec  $\xi(0) = 0$      $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$      $C_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$   
 $v \in \mathbb{R}^m$      $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times l}$      $D_{11} \in \mathbb{R}^{p \times l}$   
 $\zeta \in \mathbb{R}^p$      $B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$      $D_{12} \in \mathbb{R}^{p \times m}$   
 $\omega = \delta_d \omega_0 \in \mathbb{R}^l$  où  $\omega_0 \in \mathbb{R}^l$  et  $\delta_d$  est l'impulsion unité de Dirac  
 $A, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12}$  sont des matrices constantes

soumis aux hypothèses :

$$1. (A, B_2) \text{ est stabilisable} \quad (5.2)$$

$$2. M := D'_{12}D_{12} \text{ est régulière} \quad (5.3)$$

$$3. \text{ La matrice } \begin{pmatrix} A - \lambda & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} \text{ est de rang (colonne) plein } \forall \lambda \in \delta\mathbb{D} \quad (5.4)$$

Le seul contrôle optimal qui minimise  $\|\zeta\|_2$  pour  $v \in l(\mathbb{Z}_+)$  est donné par

$$v_{opt} = F\xi + F_0\omega \quad (5.5)$$

et

$$\min_{v \in l(\mathbb{Z}_+)} \|\zeta\|_2 = \|\hat{g}_c \omega_0\|_2 \quad (5.6)$$

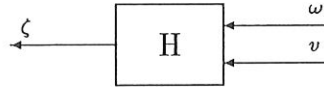
où  $F, F_0, \hat{g}_c$  et  $X$  sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}S_2 &= \left( \begin{pmatrix} A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1 & 0 \\ -C'_1 (I - D_{12} M^{-1} D'_{12}) C_1 & I \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & B_2 M^{-1} B'_2 \\ 0 & (A - B_2 M^{-1} D'_{12} C_1)' \end{pmatrix} \right) \\ X &= Ric(S_2) \\ F &= -(M + B'_2 X B_2)^{-1} (B'_2 X A + D'_{12} C_1) \\ F_0 &= -(M + B'_2 X B_2)^{-1} (B'_2 X B_1 + D'_{12} D_{11}) \\ A_F &= A + B_2 F \\ C_{1F} &= C_1 + D_{12} F \\ B_{1F} &= B_1 + B_2 F_0 \\ D_{11F} &= D_{11} + D_{12} F_0 \\ \hat{g}_c &= D_{11F} + \lambda C_{1F} (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F}\end{aligned}$$

$$\text{Nous avons également que } A_F = A + B_2 F \text{ est stable} \quad (5.7)$$

$$\text{de sorte que } v_{opt} \in l_2(\mathbb{Z}_+) \text{ et nous minimisons } \|\zeta\|_2 \text{ sur } v \in l_2(\mathbb{Z}_+) \quad (5.8)$$

Le problème peut être représenté graphiquement de la façon suivante :



## 5.3 Preuve

### Etape 1

Montrons  $\hat{\zeta} = \hat{g}_c \omega_0 + \hat{g}_i \hat{\varrho}$   
 où  $\hat{g}_i$  est défini par (4.20) et  $\varrho := v - F\xi - F_0\omega$

(5.9)

Nous allons considérer la description de notre système H (5.1) :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi + B_1\omega + B_2v \\ \zeta &= C_1\xi + D_{11}\omega + D_{12}v\end{aligned}\tag{5.10}$$

Introduisons l'expression de  $\varrho$  (5.9) dans ces équations, nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= (A + B_2F)\xi + (B_1 + B_2F_0)\omega + B_2\varrho \\ \zeta &= (C_1 + D_{12}F)\xi + (D_{11} + D_{12}F_0)\omega + D_{12}\varrho\end{aligned}\tag{5.11}$$

qui donne par (2.10) avec  $\hat{g}_c$  et  $\hat{g}_i$  donnés par (4.20) et (4.19)

$$\hat{\zeta} = \hat{g}_c \hat{\omega} + \hat{g}_i \hat{\varrho}\tag{5.12}$$

Or, nous savons par hypothèse que  $\omega = \delta_d \omega_0$ , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \omega(0) &= \omega_0 \\ \omega(k) &= 0 \quad \forall k > 0 \end{cases}\tag{5.13}$$

par la définition d'impulsion unité (2.1).

Par la définition de transformée en  $\lambda$  (voir (2.7)),  $\hat{\omega}(\lambda) = \omega(0) + \lambda\omega(1) + \lambda^2\omega(2) + \dots$ . Avec les informations tirées de (5.13),  $\hat{\omega}(\lambda) = \omega_0$ .

Réécrivons (5.12) en tenant compte de cette dernière égalité. Nous obtenons :  $\hat{\zeta} = \hat{g}_c \omega_0 + \hat{g}_i \hat{\varrho}$ , qui est effectivement le résultat attendu par l'étape 1.

## Etape 2

$$\boxed{\text{Montrons : } \|\zeta\|_2^2 = \|\hat{g}_c \omega_0\|_2^2 + \|\hat{g}_i \hat{\varrho}\|_2^2} \quad (5.14)$$

En effet, multiplions l'équation (5.9) par son complexe conjugué, nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}^* \hat{\zeta} &= (\hat{g}_c \omega_0 + \hat{g}_i \hat{\varrho})^* (\hat{g}_c \omega_0 + \hat{g}_i \hat{\varrho}) \\ &= (\hat{g}_c \omega_0)^* \hat{g}_c \omega_0 + (\hat{g}_i \hat{\varrho})^* \hat{g}_c \omega_0 + (\hat{g}_c \omega_0)^* \hat{g}_i \hat{\varrho} + (\hat{g}_i \hat{\varrho})^* (\hat{g}_i \hat{\varrho}) \end{aligned}$$

En évaluant cette équation en  $e^{j\theta}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}^*(e^{j\theta}) \hat{\zeta}(e^{j\theta}) &= (\hat{g}_c(e^{j\theta}) \omega_0)^* \hat{g}_c(e^{j\theta}) \omega_0 + (\hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\varrho}(e^{j\theta}))^* \hat{g}_c(e^{j\theta}) \omega_0 \\ &\quad + \omega_0^* \hat{g}_c^*(e^{j\theta}) \hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\varrho}(e^{j\theta}) + (\hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\varrho}(e^{j\theta}))^* (\hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\varrho}(e^{j\theta})) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Montrons que nous avons l'égalité suivante :

$$\hat{g}^\sim(e^{j\theta}) = \hat{g}^*(e^{j\theta}) \quad (5.16)$$

en effet :  $\hat{g}^\sim(e^{j\theta}) = \hat{g}(\frac{1}{e^{j\theta}})' = \hat{g}(e^{-j\theta})' = \hat{g}^*(e^{j\theta})$

Introduisons (5.16) dans (5.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}^*(e^{j\theta}) \hat{\zeta}(e^{j\theta}) &= (\hat{g}_c(e^{j\theta}) \omega_0)^* \hat{g}_c(e^{j\theta}) \omega_0 + \hat{\varrho}(e^{j\theta})^* \hat{g}_i^\sim(e^{j\theta}) \hat{g}_c(e^{j\theta}) \omega_0 \\ &\quad + \omega_0^* (\hat{g}_i^\sim(e^{j\theta}) \hat{g}_c(e^{j\theta}))^* \hat{\varrho}(e^{j\theta}) + (\hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\varrho}(e^{j\theta}))^* (\hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\varrho}(e^{j\theta})) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Montrons :

$$\hat{\varrho}^*(\hat{g}_i^\sim \hat{g}_c) = (\hat{g}_i^\sim \hat{g}_c)^* \hat{\varrho} = 0 \quad (5.18)$$

Nous avons que  $\hat{g}_i^\sim \hat{g}_c \in \mathcal{RH}_2(\mathbb{D})^\perp \subseteq \mathcal{H}_2(\mathbb{D})^\perp$  par le lemme (4.3.1). La fonction temporelle associée à  $\hat{g}_i^\sim \hat{g}_c$  appartient à  $l_2(\mathbb{Z}_-^0)$  par l'isomorphisme (2.4.1) (i.e. cette fonction temporelle est nulle  $\forall k \geq 0$ ). La fonction temporelle associée à  $\hat{g}_i^\sim \hat{g}_c$  est  $\hat{g}_i^\sim * g_c$  où  $\hat{g}_i^\sim(k) = g_i'(-k) \forall k$ .

Nous avons que  $\varrho \in l(\mathbb{Z}_+)$  car tout signal de  $\varrho$  est à support sur  $\mathbb{Z}_+$ .

Notons que  $\varrho(k)$  est un vecteur de dimension  $m$  et que  $(\hat{g}_i^\sim * g_c)(k)$  est une matrice de dimension  $m \times l$ . Soit pour tout  $j = 1, 2, \dots, l$  :  $e_j \in \mathbb{R}^l$  tel que  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)'$  avec 1 en position  $j$ . Nous avons alors pour tout  $j = 1, 2, \dots, l$  que  $\langle (\hat{g}_i^\sim * g_c) e_j, \varrho \rangle = 0$  et par la seconde égalité de Parseval (2.13)  $\langle (\hat{g}_i^\sim \hat{g}_c) e_j, \hat{\varrho} \rangle = 0$ . Il suit que le résultat (5.18) est vrai.



Avec cette information, reformulons (5.17), nous obtenons que :

$$\|\hat{\zeta}\|_2^2 = \|\hat{g}_c \omega_0\|_2^2 + \|\hat{g}_i \hat{\rho}\|_2^2$$

Or en vertu de la première égalité de Parseval (2.12) :  $\|\hat{\zeta}\|_2^2 = \|\zeta\|_2^2$ . Nous avons alors le résultat attendu par l'étape 2.

### Etape 3

Montrons :  $\|\zeta\|_2^2 = \|\hat{g}_c \omega_0\|_2^2 + \|(M + B_2' X B_2)^{\frac{1}{2}} \hat{\rho}\|_2^2$

(5.19)

Comparons (5.14) à (5.19), il nous reste à montrer que l'égalité suivante :

$$\|\hat{g}_i \hat{\rho}\|_2^2 = \|(M + B_2' X B_2)^{\frac{1}{2}} \hat{\rho}\|_2^2 \quad (5.20)$$

est vraie et nous aurons alors le résultat de l'étape 3.

Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} \|\hat{g}_i \hat{\rho}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace}[(\hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\rho}(e^{j\theta}))^* \hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\rho}(e^{j\theta})] d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace}[\hat{\rho}^*(e^{j\theta}) \hat{g}_i^*(e^{j\theta}) \hat{g}_i(e^{j\theta}) \hat{\rho}(e^{j\theta})] d\theta \end{aligned} \quad (5.21)$$

Or, en vertu du lemme (4.4.1), nous avons l'égalité suivante :

$$\hat{g}_i^*(e^{j\theta}) \hat{g}_i(e^{j\theta}) = M + B_2' X B_2$$

En utilisant l'équation (5.16), elle peut se mettre sous la forme :

$$\hat{g}_i^*(e^{j\theta}) \hat{g}_i(e^{j\theta}) = M + B_2' X B_2$$

De plus, M est définie positive. En effet,  $M := D_{12}' D_{12}$  est régulière par (5.3).

Nous avons aussi que X est semi-définie positive. En effet,

1.  $(A - B_2 M^{-1} D_{12}' C_1, B_2 M^{-\frac{1}{2}})$  est stabilisable car  $(A, B_2)$  est stabilisable par (5.2) (La démonstration a été réalisée dans la partie A (4.8) de la preuve du lemme (4.2.1)).

2.  $\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda I - A + B_2 M^{-1} D_{12}' C_1 \\ (I - D_{12} M^{-1} D_{12}')^{\frac{1}{2}} C_1 \end{pmatrix} = n \forall \lambda \text{ tel que } |\lambda| = 1$  car  $\begin{pmatrix} A - \lambda & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix}$  est de rang (colonne) plein  $\forall \lambda \in \delta\mathbb{D}$  (La démonstration a été réalisée dans la

partie A (4.9) de la preuve du lemme 4.2.1).

3.  $X = \text{Ric}(S_2)$  par hypothèse.

En appliquant le théorème (3.5.1), nous avons effectivement que  $X$  est semi-définie positive.

Nous pouvons alors prendre la racine carrée de  $M + B'_2 X B_2$  et avoir l'égalité suivante

$$\hat{g}_i(e^{j\theta})^* \hat{g}_i(e^{j\theta}) = ((M + B'_2 X B_2)^{\frac{1}{2}})^* (M + B'_2 X B_2)^{\frac{1}{2}}$$

En introduisant cette expression dans (??), nous obtenons finalement que

$$\begin{aligned} \|\hat{g}_i \hat{\varrho}\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace}[\hat{\varrho}^*(e^{j\theta})((M + B'_2 X B_2)^{\frac{1}{2}})^* (M + B'_2 X B_2)^{\frac{1}{2}} \hat{\varrho}(e^{j\theta})] d\theta \\ &= \|(M + B'_2 X B_2)^{\frac{1}{2}} \hat{\varrho}\|_2^2 \text{ par (2.11)} \end{aligned}$$

#### Etape 4

Preuve de (5.5) et (5.6)

(5.22)

A l'étape précédente, nous avons montré l'égalité suivante :

$$\|\zeta\|_2^2 = \|\hat{g}_c \omega_0\|_2^2 + \|(M + B'_2 X B_2)^{\frac{1}{2}} \hat{\varrho}\|_2^2 \quad (5.23)$$

Nous cherchons à minimiser  $\|\zeta\|_2^2$ . Nous ne pouvons agir que sur  $\hat{\varrho}$  car  $\hat{g}_c$ ,  $\omega_0$  et  $M + B'_2 X B_2$  sont des quantités fixées par le problème. Le  $\hat{\varrho}$  qui minimise  $\|\zeta\|_2^2$  est donc  $\hat{\varrho} = 0$ .

Nous avons alors :  $\min \|\zeta\|_2^2 = \|\hat{g}_c \omega_0\|_2^2$  qui peut également s'écrire

$$\min \|\zeta\|_2 = \|\hat{g}_c \omega_0\|_2$$

Nous avons donc démontré (5.6).

Si  $\hat{\varrho} = 0$  nous avons  $\varrho = 0$  et en vertu de (5.9) nous avons alors :

$$v_{opt} = F\xi + F_0\omega \quad (5.24)$$

qui est l'égalité (5.5).

### Etape 5

Preuve de (5.7).

Nous savons que  $X = \text{Ric } S_2$  par hypothèse et que  $S_2 \in \text{dom Ric}$  par le lemme (4.2.1), les hypothèses du lemme (3.5.2) sont alors vérifiées pour la paire symplectique  $S_2$ . La deuxième propriété de ce lemme implique que :

$$(I + B_2 M^{-1} B_2' X)^{-1} (A - B_2 M^{-1} D_{12}' C_1) \text{ est stable} \quad (5.25)$$

Nous avons que

$$\begin{aligned} A_F &= A + B_2 F \\ &= A - B_2 (M + B_2' X B_2)^{-1} (B_2' X A + D_{12}' C_1) \\ &= A - B_2 (I + M^{-1} B_2' X B_2)^{-1} M^{-1} (B_2' X A + D_{12}' C_1) \\ &= A - (I + B_2 M^{-1} B_2' X)^{-1} B_2 M^{-1} (B_2' X A + D_{12}' C_1) \\ &= (I - (I + B_2 M^{-1} B_2' X)^{-1} B_2 M^{-1} B_2' X) A - (I + B_2 M^{-1} B_2' X)^{-1} B_2 M^{-1} D_{12}' C_1 \\ &= (I + B_2 M^{-1} B_2' X)^{-1} (A - B_2 M^{-1} D_{12}' C_1) \end{aligned}$$

Nous retrouvons l'expression (5.25), nous avons donc  $A_F = A + B_2 F$  est stable. Nous avons (5.7).

### Etape 6

Preuve de (5.8).

En appliquant  $v_{opt}$  au système H, nous avons par (5.1) :  $\dot{\xi} = A\xi + B_1\omega + B_2 v_{opt}$  avec  $\omega = \delta_d \omega_0 \in \mathbb{R}^l$  et  $\xi(0) = 0$

Il suit alors en utilisant (5.24), (4.15) et (4.17) que

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A + B_2 F)\xi + (B_1 + B_2 F_0)\delta_d \omega_0 \\ &= A_F \xi + B_{1F} \delta_d \omega_0 \text{ avec } \xi(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

En prenant la transformée en  $\lambda$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \hat{\xi}(\lambda) &= A_F \hat{\xi}(\lambda) + B_{1F} \omega_0 \\ \hat{\xi}(\lambda) &= \lambda (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} \omega_0 \end{aligned}$$

Ainsi par (5.24) :  $\hat{v}_{opt}(\lambda) = (\lambda F (I - \lambda A_F)^{-1} B_{1F} + F_0) \omega_0$

Comme  $A_F$  est stable  $\hat{v}_{opt}(\lambda) \in \mathcal{RH}_2(\mathbb{D})$  et  $v_{opt} \in l_2(\mathbb{Z}_+)$  en vertu des théorèmes (2.4.1) et (2.4.2).

En notant par  $\zeta(v_{opt})$  la sortie du système H lorsqu'il est soumis à l'entrée  $v_{opt}$ , nous obtenons :

$$\| \hat{g}_c \omega_0 \|_2^2 = \min_{v \in l_2(\mathbb{Z}_+)} \| \zeta \|_2^2 \leq \min_{v \in l_2(\mathbb{Z}_+)} \| \zeta \|_2^2 \leq \| \zeta(v_{opt}) \|_2^2 = \| \hat{g}_c \omega_0 \|_2^2$$

d'où  $\| \hat{g}_c \omega_0 \|_2^2 = \min_{v \in l_2(\mathbb{Z}_+)} \| \zeta \|_2^2$  atteint pour  $v_{opt} \in l_2(\mathbb{Z}_+)$ . Nous avons (5.8). ■

*Note : le système en boucle fermée  $\omega \rightsquigarrow \zeta$  est décrit par  $[A_F, B_{1F}, C_{1F}, D_{11F}]$  où  $A_F$  est stable : il est donc intérieurement stable.*

En effet, nous avons déjà (5.26) :

$$\dot{\xi} = A_F \xi + B_{1F} \omega$$

En outre, en utilisant (5.1), (5.24), (4.16) et (4.18) :

$$\begin{aligned} \zeta &= C_1 \xi + D_{11} \omega + D_{12} v_{opt} \\ &= C_1 \xi + D_{11} \omega + D_{12} [F \xi + F_0 \omega] \\ &= (C_1 + D_{12} F) \xi + (D_{11} + D_{12} F_0) \omega \\ &= C_{1F} \xi + D_{11F} \omega \end{aligned}$$

# Notations

$G$	: système $G$ .
$\hat{g}(\lambda)$	: fonction de transfert du système $G$ .
$g$	: réponse impulsionnelle du système $G$ .
$\hat{g}^{\sim}(\lambda)$	: est égale à $\hat{g}(\lambda)^{-1}$ .
$[A, B, C, D]$	: description du système $G$ .
$\mathbb{D}$	: disque unité fermé.
$\partial\mathbb{D}$	: frontière du disque unité.
$\overset{\circ}{\mathbb{D}}$	: disque unité ouvert.
$\mathcal{H}_2(\mathbb{D})$	: espace de Hardy muni de la norme-2.
$\mathcal{L}_2(\partial\mathbb{D})$	: espace de Lebesgue muni de la norme-2
$x^*$	: complexe conjugué transposé de $x$ .
$H^\perp$	: ensemble orthogonal à l'ensemble $H$ .
$H'$	: transposée de la matrice $H$
$\delta_d(k)$	: impulsion unité de Dirac.
$I$	: matrice unité.
$\sigma(A)$	: spectre de $A$
$\sigma_{max}$	: valeur singulière maximale
$   $	: isomorphisme
$f * g$	: produits de convolution de $f$ et $g$



# Conclusion

Au terme de ce mémoire, nous avons atteint l'objectif que nous nous étions fixés, c'est-à-dire que nous avons résolu le problème de minimisation de l'impact d'une perturbation sur la sortie d'un système discret linéaire constant (Théorème 5.2.1). Nous avons pu constater que le contrôle qui donnait la sortie minimale en norme- $l_2$  était constitué d'un asservissement d'état ainsi que d'une anticipation de perturbation. Nous avons également pu constater que, grâce à cette minimisation, nous obtenions un système de la perturbation vers la sortie internement stable. Le prix à payer est la solution d'une équation de Riccati associée.

Nous aurions pu par la suite étudier le problème de minimisation de la norme- $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert de la perturbation vers la sortie d'un système asservi  $S(G,K)$  internement stable : système obtenu en munissant le système de départ  $G$  d'un compensateur  $K$  qui le stabilise internement, voir [2] pp143-158.

Dans ce mémoire, nous avons traité le problème de l'impact d'une perturbation sur la sortie d'un système linéaire constant discret uniquement dans le cas où nous avons un contrôle  $\omega = \delta_d \omega_0$ , il serait utile d'étudier le problème avec d'autres entrées  $\omega$  (par exemple optimiser la partie transitoire de la sortie avec  $\omega(k) = 1 \ \forall k \geq 0$ ).

# Bibliographie

- [1] F.M.CALLIER & C.A.DESOER *Linear System Theory*, (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [2] TONGWEN CHEN & BRUCE FRANCIS *Optimal Sampled-Data Control Systems*, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1995).
- [3] F.M.CALLIER *Contrôle Optimal*, (Notes du Cours de Première Licence, Namur, année académique 1997-1998).
- [4] F.M.CALLIER *Systèmes Optimaux Asservis*, (Notes du Cours de Deuxième Licence, Namur, année académique 1997-1998).
- [5] OGATA, KATSUHIKO *Discrete-time Control Systems*, (Prentice-Hall International London, 1987).